Beispiel 3

$$\eta = \eta(x) : \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$$

$$\text{Tangentengleichung} \quad \frac{y-\eta}{x-0} = y' \Rightarrow \eta = y - xy'$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(y-xy')}{\mathrm{d}x} = y' - y' - xy'' = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$xy'' + \sqrt{1+(y')^2} = 0 \tag{1}$$

Lösung von (1): Setze $y' = y'(x) := p(x) = p$

$$xp' + \sqrt{(1+p^2)} = 0 \tag{2}$$

$$\text{Lösung von (2):} \quad p = p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x} - \frac{x}{C_1}\right), \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Lösung von (1):} \quad y' &= y'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x} - \frac{x}{C_1}\right), \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ y &= y(x) = \frac{1}{2}\left(C_1 \ln \mid x \mid - \frac{x^2}{2C_1}\right) + C_1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beispiel 6

Gesucht ist die DGL mit der Lösung:

$$y = (x-a)^2, \quad a \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} y' = 2(x-a) \quad &\Rightarrow \quad a = -\frac{y'}{2} + x \\ &\Rightarrow \quad x - a = \frac{y'}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen in (3)} \quad y &= \left(\frac{y'}{2}\right)^2 \\ \text{oder} \quad 4y &= (y')^2 = 0 \end{aligned}$$

Grundbegriffe

Def. (a) Eine Bestimmungsgleichung für $y = y(x)$ der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{4}$$

heißt gewöhnliche DGL n-ter Ordnung, wobei die n-te Ableitung tatsächlich vorkommen muß.

(b) Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung von (4) auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, falls y auf I n-mal differenzierbar ist und $\forall x \in I$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

(c) Die allgemeine Lösung von (4): Die Menge aller Lösungen von (4).

Beispiel

(a) $y'' \cdot y - y - x^2 = 0$
Lösung: z.B. $y(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
"Probe": $2x^2 - x^2 - x^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $y' = \mathrm{e}^x$: $y = \int y' \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C, C \in \mathbb{R}$

(c) $y' = \mathrm{e}^x$: $y' = \int y'' \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$
$y = \int y' \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_1 x + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$

Bemerkung

Die allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung ist in der Regel eine n-parametrige Kurvenschar!

Anfangswertaufgabe (AWA)

Gesucht sind Funktionen $y = y(x)$ mit

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})\}$ DGL n-ter Ordnung

$$\text{und} \quad \begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

Die explizite DGL 1. Ordnung

Wir betrachten explizite DGL 1. Ordnung der Form

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

und ein Rechteckgebiet $D = \{(x, y) \mid x \in I, y \in \tilde{I}\}$, $I, \tilde{I} \in \mathbb{R}$

Bemerkung

Ist $y = y(x)$ eine Lösungskurve von (5) mit $y(x_0) = y_0$, so gilt: $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$.
Also ist $f(x_0, y(x_0))$ der Anstieg von $y = y(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und somit $f(x_0, y_0)$ der Anstieg der Lösungskurve in $(x_0, y_0) \in D$

Existenz von Lösungen

Ist f stetig auf D, so verläuft durch jeden Punkt von D eine Lösungskurve (verläuft von beiden Seiten bis zum Rand D). Somit verläuft die AWA $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ für $(x_0, y_0) \in D$ mindestens eine Lösung von D. (Hinreichende Bedingung)

Eindeutigkeit der Lösung (hinreichende Bedingung)

Sind sowohl f als auch f_y stetig auf D, so verläuft durch jeden Punkt von D genau eine Kurve der AWA. $y' = F(x,y), y(x_0) = y_0$ mit $(x_0, y_0) \in D$.

Beispiel

$y' = 2\sqrt{y}, \quad f(x,y) = 2\sqrt{y}$
$D = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$
f stetig auf D, $\quad f_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$ stetig auf D
AWA: $y' = 2\sqrt{y}, \quad y(1) = 1$
Lösung: $y(x) = x^2$

Spezielle Typen von DGL 1. Ordnung

DGL mit getrennten Veränderlichen

Normalform: $\quad y' = g(x) \cdot h(y)$, $(x,y) \in D$
Nullstelle von $h(y_0) = 0$: ergibt Lösungen $\Rightarrow$ sind konstante Funktionen ($y = y_0$)
Setze $h(y) \neq 0$: $\quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$

Trennen der Veränderlichen (TdV)

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x$$

ausrechnen und (falls möglich) nach y umstellen.

Beispiel (a) $y' = y\cos x:\ g(x) = \cos x,\ h(y) = y$

$[f(x,y) = y\cos x]$

(a.0) $f(x,y) = y\cos x$ und $f_y(x,y) = \cos x$ sind stetig auf $E \in \mathbb{R}^2$

(a.1) Nullstellen von $h(y):\quad y_0 = 0 \Rightarrow y = 0$ ist Lösung der DGL.

(a.2) $h(y) \neq 0 : \mathrm{TdV}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\cos x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \cos x \mathrm{d}x \\
\Rightarrow \ln \mid y \mid &= \sin x + C,\ C \in \mathbb{R} \\
\mid y \mid &= \mathrm{e}^{\sin x + C} \\
&= K\mathrm{e}^{\sin x};\ K = \mathrm{e}^C > 0 \\
y &= \pm K\mathrm{e}^{\sin x} \\
\Rightarrow y &= L\mathrm{e}^{\sin x};\ L \in \mathbb{R}\backslash\{0\}
\end{aligned}$$

(a.3) (a.1)$\wedge$(a.2)$\Rightarrow y = C_1\mathrm{e}^{\sin 0},\ C_1 \in \mathbb{R}$

AWA $y(0) = 2 :\quad 2 = C_1\mathrm{e}^{\sin 0} \Rightarrow 2 = C_1 \cdot 1$

$y_{AWA} = 2\mathrm{e}^{\sin x}$

(b) $y' = 2\sqrt{y} :\ g(x) = 1,\ h(y) = 2\sqrt{y},\ f(x,y) = 2\sqrt{y}$

$D = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$

(b.0) $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ und $f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ sind stetig auf D

(b.1) $h(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \notin D \Rightarrow$ keine Lösungskurve

(b.2) $h(y) \notin 0 :$ TdV $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sqrt{y}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} &= \int \mathrm{d}x \\
\sqrt{y} &= x + C > 0,\ C \in \mathbb{R} \\
y &= (x+C)^2,\ \text{mit } x + C > 0
\end{aligned}$$

Ähnlichkeits DGL

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),\ x \neq 0$$

Lösung

Setze $\dfrac{y}{x} = z = z(x) \Rightarrow y = x \cdot z$

$\Rightarrow y' = z + xz'$

neue (transformierte) DGL: $z + xz' = f(z)$ ist über TdV lösbar!

$$\begin{aligned}
xz' &= f(z) - z \\
1.\quad f(z) - z &= 0 \\
2.\quad f(z) - z &\neq 0 :\ x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z) - z \\
\Rightarrow &\quad \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}$$

Beispiel

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} : f(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Wähle obige Substitution: $\frac{y}{x} = z \Rightarrow z + xz' = f(z)$

$$\begin{aligned} z + xz' &= z^2 + z \\ xz' &= z^2 \\ x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= z^2 \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ -\frac{1}{z} &= \ln \mid Cx \mid \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln \mid x \mid + K,\ K \in \mathbb{R} \\ &= \ln \mid x \mid + \ln C,\ C = \mathrm{e}^K > 0 \\ &= \ln \mid\mid x \mid \cdot C \mid = \ln \mid x \cdot C \mid \end{aligned}$$

$$2 = -\frac{1}{\ln \mid Cx \mid}$$

Lösung unseres Beispiels:

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln \mid Cx \mid} \Rightarrow y = -\frac{x}{\ln \mid Cx \mid},\ C > 0$$