فعالية وحدة مقترحة في "هندسة الفراكتال" "Fractal geometry"
لطلاب الرياضيات بكلية التربية

من اعداد:
دكتور/ رضا أبوعلوان السيد ابراهيم
مدرس المناهج وطرق تدريس الرياضيات
جامعة السلطان قابوس- سلطنة عمان
E-mail:abuelwan@squ.edu.om

مقدمة:

مـــع نهايـــة القرن العشرين تطور تعليم الرياضيات تطورا مذهلا ، فانتقل بالمتعلمين من التركيز علـــي حفـــظ الحقائق وتطبيق الخوارزميات الرياضية الي اكتشاف قوة الرياضيات ودورها في تنمية تفكـــيرهم مـــن خلال التطبيقات الحياتية والمجتمعية للرياضيات ،ومع التطور التقني والتكنولوجي في الســـنوات الأخـــيرة ، تطوراستخدام التكنولوجيا التعليمية في تعليم الرياضيات، وبرز ذلك في الأدوار المـــتعددة لاســـتخدامات الكمبـــيوتر مـــن برامج تعليمية متخصصة وكذلك استخدام شبكة المعلومات Internet، بالأضـــافة الـــي الأدوار المؤثـــرة للآلات الحاسبة البيانية Graph Calculator في تنمية مهارات المتعلمين النوعية سواء في مجال حل المعادلات والدوال أو معالجة البيانات احصائيا.

هذا التطور في مجال تعليم الرياضيات ادي الي توجيه اهتماما اكبر في بنية الرياضيات المعرفية ، وعلاقة الرياضيات بمكونات العلوم الطبيعية الأخري ،فالأشياء في الطبيعة لها خصائصها الطبيعية بالأضـــافة الي البعد الرياضي المكون لهذة الأشياء ، ومن هنا كان البحث عن تفسير رياضي لتكون الأشـــياء فـــي الفلـــك وعلوم البيئة والظواهر الجوية ، فعندما فكر ماندلبروت Mandelbrot في ان الســـحب ليســـت كرات وان الجبال ليست مخاريط ، والسواحل ليست دوائر فقد بدأ في اكتشاف نوع جديد من التركيب الهندسي البديع اطلق عليه هندسة الفراكتال Fractal Geometry وتعني البحث في المكونات الجزئية للأشكال الرياضية أو الأشياء فى الطبيعة وفقا لمجموعة من الخصائص الرياضية.

يذكر نايلور (Naylor,1999) ان الفراكتلات تقدم لنا اشكالا ذات قيمة جمالية كبيرة وهي ترتبط بشـــكل مباشـــر بكيفية تنظيم العالم من حولنا، ومن وجهة نظر معظم معلمي الرياضيات فانها تفجر طاقـــات الأبـــداع والخيال عند المتعلمين ، ويعتبر تدريس هندسة الفراكتال ذو اهمية كبيرة في اثراء وتنمـــية تفكير المتعلمين الذي يعتبر من اهم اهداف تعليم الرياضيات ، فتنمية الحس المكاني والحدس بالشـــكل من المحاور التي يرى عبيد (عبيد،١٩٩٨) انها تشكل التوجهات العامة لتعليم الرياضيات في المســـتقبل ، فيذكر ان عالم الهندسة المتواجد في عالم الحقيقة يتطلب ترييضا من خلال دراسة هندسة حدســـية وهندســـة تحويلـــية وهندسة استدلالية وهندسة تحليلية وهندسة اتجاهية ، واضافة خصائص تبولوجـــية والتعرف والتعامل مع انماط هندسية تتكون من ايقاعات تكرارية لوحدات هندسية صغيرة اطلق عليها هندسة كسرية (FRACTALS).

وتشير دراسات ومقالات الي ان اهمية دراسة هندسة الفراكتال تظهر في التالي:

(١) انها تقدم حلا بسيطا للتوصل الي التفاصيل الدقيقة للأشياء الكبيرة ، مثل السحب التي لا يمكننا قياس حدودها وكذلك المناظر الطبيعية.

(٢) تفيد هندسة الفراكتال في رسم الأشياء الطبيعية الواقعية علي شاشة الكمبيوتر.

(٣) يمكن من خلال خواصها وصف الظواهر الجوية ، وموضوعات ترتبط بالبيئة والفلك.

(٤) تستثير التفكير الأبتكاري والأستقصاء عند المتعلمين من خلال فحص وتحليل مكونات الأشكال الفراكتلية.

(٥) مـــن خلالها يمكن مذج الفون مع الرياضيات ، فتتحول المعادلات من مجرد ارقام ورموز الي أشكال ورسومات.

(٦) تظهـــر الطالـــب المكتشف من خلال ربطه الدائم للأشكال في الطبيعة بالخصائص الرياضية لهندسة الفراكتال.

ولا تخلو برامج اعداد معلمي الرياضيات في العديد من معاهد التربية في استراليا وأمريكا و دول اوربـــية مـــن تضمين برامجها بمقرر في هندسة الفراكتلات ، وهو ما نفتقده في برامج اعداد معلمي الرياضـــيات ، فمـــن خلال اطلاع الباحث علي البرنامج الأكاديمي لطلاب الرياضيات بكلية التربية بجامعـــة السلطان قابوس ، يتضح خلو هذا البرنامج من دراسة هندسة الفراكتال الذي يمكن ان يكون له تأثير على تنمية انواع التفكيرالمختلفة، وهو ما دفع الباحث للقيام بدراسة حول فعالية وحدة مقترحة في هندسة الفراكتال لدى طلاب الرياضيات بكلية التربية.

أهداف البحث:

يهدف البحث الي :

١- اعداد وحدة في هندسة الفراكتال يمكن تضمينها في برنامج اعداد معلمي الرياضيات بكلية التربية.

٢- تعرف فعالية الوحدة المقترحة لطلاب الرياضيات بكلية التربية.

أسئلة البحث:

١- ما مكونات وحدة في هندسة الفراكتال تناسب طلاب الرياضيات بكلية التربية؟

٢- ما فعالية الوحدة المقترحة لطلاب الرياضيات بكلية التربية؟

حدود البحث:

١- وحدة هندسة الفراكتال تتضمن بشكل اساسي:الفراكتال Fractal ، والتكرارات Iteration والمرتبطة بالرياضيات المدرسية.

٢- مجموعة مكونة من خمسة وعشرين طالب وطالبة من تخصص رياضيات/كمبيتر بكلية التربية بجامعة السلطان قابوس.

فرض البحث :

في ضوء مشكلة البحث وحدودها يحاول البحث التحقق من صحة الفرض التالي:

توجد فروق دالة احصائيا عند مستوي < ٠٠١، بين متوسطي درجات الطلاب في (الأختبار التحصيلي المعد لقياس تحصيل الطلاب في وحدة هندسة الفراكتال) قبل وبعد تدريس الوحدة المقترحة لصالح التطبيق البعدي.

الأطار النظري

هندسة الفراكتال Fractal Geometry:

يعتبر مصطلح فراكتال Fractal من المصطلحات الجديدة في الأدبيات العربية لتعليم الرياضيات ، ولذلك لم يستطع الباحث تقديم ماينا ظره باللغة العربية ، ولكن بالرجوع الي مصادر عديدة مثل اساتذة الرياضيات بكلية العلوم والقواميس اللغوية وكذلك الدراسات والبحوث المرتبطة بالفراكتلات Fractals أمكن التوصل للتالي:

ابتكر ماندبلبروت Mandelbrot كلمة فراكتال Fractal لتصف وتشرح العديد من الظواهر الطبيعية ، وإن كلمة فراكتال تأتي من الفعل اللاتيني franger والذي يعني يفتت أو يكسر (Gleick 1987) ، وهذا الفعل يرتبط بوصف الخصائص الطبيعية للأشياء ، فهي تبدو (مفتتة) غير مستوية ، في أشكال مركبة ومعقدة مثل التغيرات المتعرجة جدا لساحل جزيرة ومقارنة ذلك مع المنحنى الاقليدي المنبسط ، ويشير البعض الى ان مانديلبروت هو مؤسس هندسة الفراكتال كما أسس اقليدس Euclid الهندسة الأقليدية (Camp, 2000) ،وبتحديد مانديلبروت لأهم خصائص هندسة الفراكتال فان مصطلحا مثل "الهندسة الماندلية" (Mandelbort Geometry) يمكن قبوله للأشارة الى هندسة الفراكتال على اعتبار ان الهندسة الماندلية تتعامل وفقا لخصائص فريدة قدمها ماندلبروت في كتابه The Fractal Geometry of Nature الذي نشر عام١٩٨٣ (Camp,2000,710) .

كما أن اسم فراكتال يأتي من الكلمة االلاتينية fractus وتعني تكسير أو تفتيت ، وهي تعطى لمجموعات غير عادية وهناك شقين لها : الأول وهو الفراكتلات الطبيعية real fractals وهي الأشكال والأشياء المرتبطة بالطبيعة والمرتبطة بالعلوم والثاني في الرياضيات والذي يهتم بدراسة مجموعة الفراكتلات التي غالبا يكون لها جذور في نظرية القياس النفسي .

وقد أصبحت الفراكتلات جزءا من الرياضيات فبالاضافة إلى تقديمها إمكانية تكوين الأشكال والصور بشكل جذاب وجميل فإنها أيضا تقدم لنا إطارا نظريا لتطوير موضوعات أخرى ، مثل تمثيل الظواهر الطبيعية كنمو الخلايا البكتيرية أو نمذجة الأشياء مثل النباتات وغيرها .

ويعرف كلافام (Clapham,1996.103) الفراكتال على أنه مجموعة من النقط لا تتكامل أبعادها المتجزئة أوأي مجموعة ذات تركيب مماثل ، وتعتبر الفراكتلات مجموعات ذات تراكيب غير

منـــتهاه التعقيد ، وعادة ما تحتوي على بعض القياسات ذاتية التشابه ، فأي جزء تحتويه داخلها يعتبر نســـخة مصـــغرة للمجموعـــة كلها . ويرتبط التعريف السابق مع تعريف القاموس الالكتروني حول خصـــائص الفراكتال ، فيعرف الفراكتال على أنه نمط هندسي يتكرر على مقاييس تتزايد في الصغر وتـــؤدي إلـــى أشـــكال وأسطح غير منتظمة لا يمكن تمثيلها من خلال خصائص الهندسة الاقليدية . وتســـتخدم فـــي نمذجـــة الأنمـــاط والتراكيـــب الطبيعـــية غـــير المنـــتظمة بالحاســـوب (www.dictionary.com) .

وتصـــف رانـــدي (Randi,1999,260) هندسة الفراكتال بأنها هندسة الطبيعة نظرا لارتباطها بالأشـــياء الطبيعية ، وللظواهر الطبيعية . وهو ما يؤكده جليك(Gleick,1997,91) من أن هندسة الفراكـــتال تتـــيح لنا ربط الرياضيات بالعالم خارج الفصل الدراسي ، فهي بذلك تفجر طاقات الابداع والخـــيال لدى الطلاب لارتباطها مباشرة بكيفية تنظيم العالم من حولنا (Naylor,1999,360) . وقـــد قدمت هندسة الفراكتال في أواخر القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين ، فالرياضيون مثل كانـــتور Cantor ، وكوش Koch ، وجوليا Julia وكذلك فاتو Fatou قد اكتشفوا ما نسميه الآن ونعتـــبره الفراكتلات الكلاسيكية ، وقد اختلفت أغراضهم من دراستهم للفراكتلات ، كانتور مثلا طور مـــا هـــو معروف الآن بمجموعة كانتور في أعماله المرتبطة بنظرية الفئات بينما اهتم جوليا بإيجاد جـــذور ع^{٣} – ١ = ٠ باســـتخدام طريقة نيوتن ، وقد اهتم ماندلبروت باستخدام الحاسوب في برمجة حركة النقط وطور ما يعرف الآن بمجموعة ماندلبروت .

كمـــا أن الهندسة التقليدية تقدم التقريب الأولي لتركيب الأشياء الطبيعية ، فهي اللغة التي نستخدمها للاتصـــال بتصـــميمات المنـــتجات التكنولوجية ، فإن هندسة الفراكتال تعتبر امتدادا لها ، حيث يمكن الاســـتفادة مـــنها فـــي عمـــل نماذج دقيقة للتركيبات الطبيعية ، وبذلك فهي تعتبر لغة جديدة ، عندما تتحدثها فإنك تستطيع وصف شكل السحب بدقة تامة (Barnsley,1988,1).

مما سبق يمكن وصف هندسة الفراكتال على انها:

- أشكال هندسية غير منتظمة تتكون من اجزاء غير منتهية ومتداخلة بمختلف القياسات.
- هي تلك الصور التي تنتج من تكرار المعادلات اللاخطية.
- أشـــكال هندســـية نتجت أو نمت نتيجة تطبيق بعض القواعد الرياضية عليها ، وهذه القواعد تـــأخذ الشـــكل الأساســـي وتـــنقله من خطوة الي خطوة اما بالأضافة اليه أو بتطويره وهذه العمليات يمكن ان تكرر بعدد غي منته من المرات.
- أشـــكال هندســـية تنـــتج من تقسيم الشكل الأساسي الي أجزاء صغيرة وكل جزء هو صورة مصغرة من الشكل الأساسي.

وتتميز هندسة الفراكتال بخصائص اساسية تعطي لها ذلك التركيب الفريد من بين فروع الهندسة الأخرى، ومنها:

(١) التشابه الذاتي Self-Similarity

(٢) البعد الفراكتالي Fractal Dimension

(٣) قاعدة الأحلال Replacement Rule

وعندما تقدم الفراكتلات علي انها اشكال هندسية تنتج من تطبيق نمط هندسي معين علي احد الأشكال الهندسية عدة مرات ، فان خصائص هذه الأشكال تتمثل في التالي:

(١)التشابه الذاتيSelf-Similarity:

التشابه بين الأجزاء المكونة للشكل ، اي ان الجزأ من الكل يشبه تماما ذلك الكل ،فاذا اخذنا جزءا متكاملا من الأجزاء المكونة للشكل الفراكتلي ، ثم قمنا بتكبيره عدة مرات فاننا في النهاية سوف نحصل علي الشكل الأصلي. وهناك العديد من المواقع في شبكة الأنترنت التي تقدم لهذه الخصائص ، وان كان موقعا مثل www.techlar.com/fractals/ يقدم بطريقة حركية عن طريق اختيارنا لأي جزأ من الشكل وتكبيره عدة مرات حتي نصل الي الأقتناع بوجود خاصية التشابه الذاتي للشكل.

(٢) البعد الفراكتلي Fractal Dimension:

اذا علمنا انه في الهندسة التقليدية فان النقطة ترسم في البعد الصفري، أي ليس لها بعد ، وان الخطوط المستقيمة لها بعد واحد ، بينما ترسم المربعات و الأشكال الهندسية المستوية الأخرى في بعدين ، وكذلك نعرف ان المكعب والأسطوانة والكره ترسم في ثلاثة ابعاد ، فما هو البعد الفراكتلي؟..ان الأبعاد السابقه في الهندسة الأقليدية لا تعتبر مناسبة مع تركيب الشكل الفراكتلي ، فمنحنى كوش Koch مثلا له ابعاد ≈ ١,٢٦ أي بين ١ و ٢ وهذا يعكس حقيقة ان مجموعة النقط كثيفة ليمكن عدها لمنحنى وكذلك رفيعة جدا لنحسبها كمساحة ، ولذلك فان البعد الفراكتلي أوجد العديد من التطبيقات العملية في تحليل العمليات الفوضوية chaotic. (Clapham,1996,103) . ولذلك فان البعد الفراكتلي بشكل عام ليس عدد ولاقيمة عددية ، ومنحنى الفراكتال يعتبر أحد الأبعاد للأشياء في المستوى الذي له بعدين ويقع بين ١ و ٢ بالمثل كما السطح الفراكتلي fractal surface له بعدين ويقع بين ٢و٣ ، فالقيمة تعتمد علي كيفية انشاء الفراكتال.

(٣) قاعدة الأحلال Replacement Rule:

عندما ننشيء فراكتال محدد فانه من خلال خطواتتنا لانشاء فراكتال آخر ، فان احد الأشياء المرسومة يمكن ان تحل مكان الآخر والتي تكون اكثر تركيبا من سابقتها ولكنها تملأ نفس المكان الأصلي. (McGuire,1991,15).

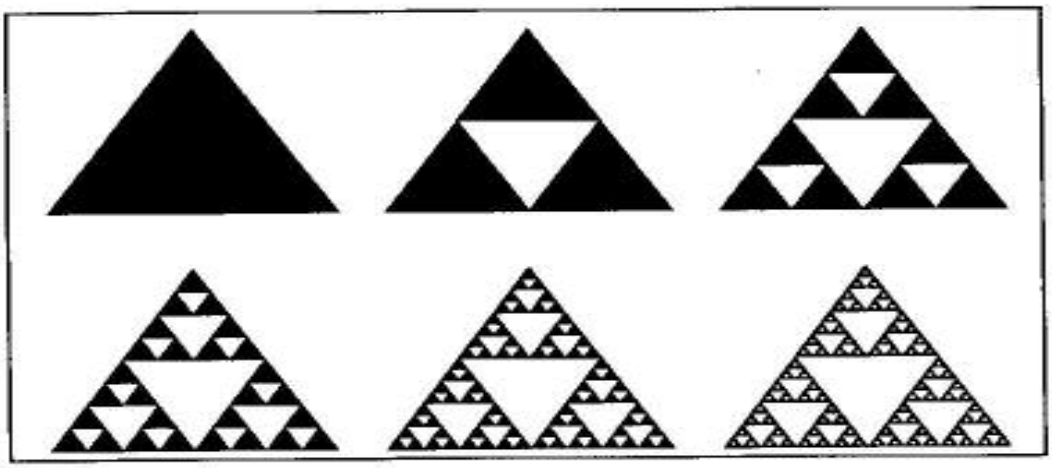
وترتبط هندسة الفراكتال بهندسة التكرارات Iteration Geometry ،حيث يكرر الشكل الهندسي وفقا لقاعدة رياضية محددة فيكون الشكل المكرر هو صورة من الشكل الأصلي وفقا لخصائص القاعدة المطبقة.

هندسة الفراكتال التقليدية Classical fractal geometry:

الأمثلة التالية توضح أشهر الأشكال لهندسة الفراكتال التقليدية والتي سوف تؤسس عليها مكونات الوحدة المقترحة لهندسة الفراكتال (Peitgen &others,1992):

١- مثلث سيربنسكي Sierpinski:

قدم الرياضي البولندي Sierpinski في عام ١٩١٦ ما يعرف بمثلث او شراع Gaskit سيربنسكي وهو يتكون وفقا للخطوات التالية: (انظر شكل ١)



شكل (١)

إنشاء مثلث سيربنسكي

١ – ارسم مثلث متساو الأضلاع

٢ – صل نقاط منتصفات الأضلاع الثلاثة ، ثم ظلل المثلث في المنتصف.

٣ – كرر iterate ما سبق على المثلثات الثلاثة الأخرى مع تظليل المثلثات في المنتصف دوما.

٤ – بعد التكرار الثاني سوف نحصل علي تسعة مثلثات غير مظللة.

٥ – كرر للمرة الثالثة بتوصيل منتصفات اضلاع المثلثات التسعة غير المظللة.

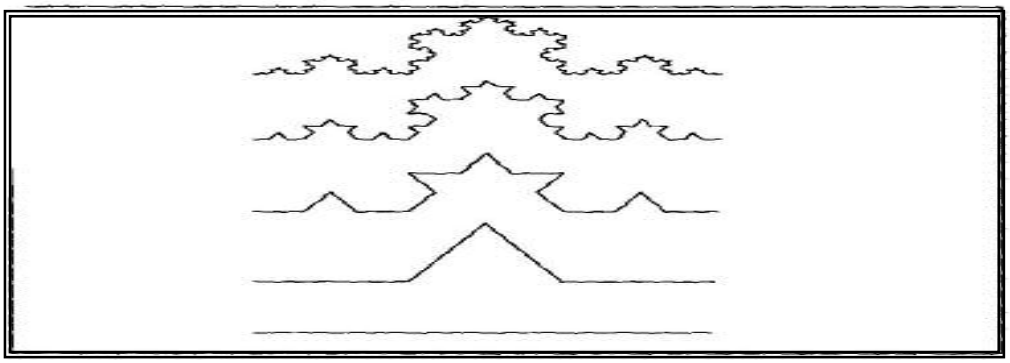
سوف نلاحظ انه يمكننا نظريا تكرار الشكل الي عدد ما لانهاية من المرات ، ولكن عمليا سيصعب تكرار ذلك بعد فترة حيث تصل المثلثات الي ان تكون صغيرة جدا بحيث لانستطيع توصيل منتصفات اضلاعها . وكذلك فان كل جزء متكرر هو شكل مشابه تماما للشكل الأصلي، اي ان خاصية التشابه الذاتي تتضح تماما بتكبير اي جزء من الشكل.

(٢) منحنى كوش The Koch curve:

قدم الرياضي السويدي كوش Koch عام ١٩٠٤ ما عرف باسمه منحنى كوش ، وهو من خلال الـــتعريف يعتـــبر منحنى ولكن ذلك لن يكون واضحا من النظر الي تركيبه ، ايضا فان هذا المنحنى لايحـــتوي علـــى خطوط مستقيمة أو قطع مستقيمة بحيث نستطيع رؤيتها ، ولكن منحنى يشتمل على

العديــد مــن التراكيب المعقدة التي يمكننا ملاحظتها في اشكال طبيعية مثل صور لسواحل الشواطيء وغيرها.

ولكي ننشيء منحنى كوش هندسيا فباتباع الخطوات التالية يمكننا رسمه : (شكل ٢)



شكل (٢)

إنشاء منحني كوش

(١) ابدأ برسم خط مستقيم (ويسمي المولد)

(٢) قسمه الى ثلاثة اجزاء متساوية.

(٣) انزع القطعة في المنتصف وضع محلها مثلث متساو الأضلاع ثُم انزع قاعدته.

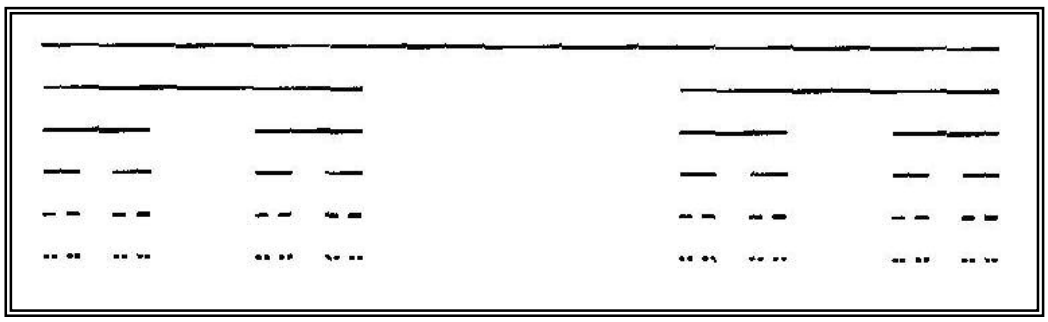
(٤) استخدم المكون السابق كأساس للمراحل التالية في الأنشاء.

(٥) كرر ماسبق بأي عدد من التكرارات.

(٣) مجموعة كانتور Cantor Set:

قدم الرياض الألماني كانتور Cantor نظرية الفئات وكذلك نشر مجموعته في عام ١٨٨٣ م. التي تعتبر النموذج الخفي للعديد من الفراكتلات مثل مجموعة جوليا Julia.

ولتكوين مجموعة كانتور ببساطة يمكن استخدام عمليات التكرارات iterations لتكوينها. (شكل ٣) كالتالي:



شكل (٣)

مجموعات كانتور

(١) ارسم قطعة مستقيمة قد تكون ٦ سم مثلاً واعتبرها وحدة طول واحدة. وأعطها الرمز أ٠ هذه القطعة ستعتبر بذرة Seed التي تنبت المجموعة.

(٢) سوف نحذف القطعة التي في الثلث الأوسط للقطعة أ٠ ونرسم الباقي ونسميه أ١.

(٣) سوف نحذف القطعة في الثلث الأوسط للقطعتين في أ١ ونرسم الباقي ونسميه أ٢.

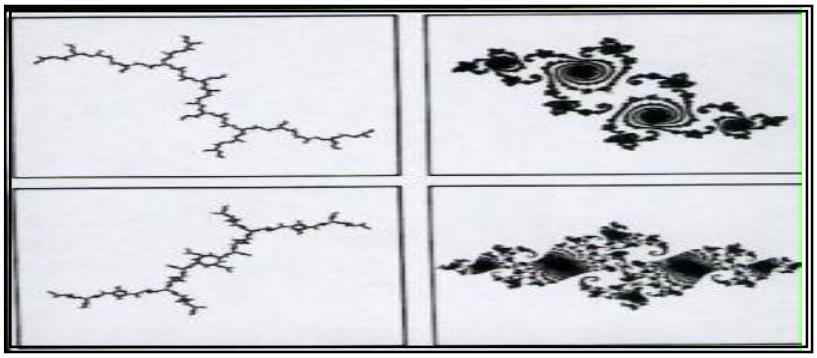
(٤) ارسم أ٣، أ٤ بنفس التكرار السابق.

(٥) سوف تلاحظ النحو بعد عدة تكرارات أنها تبدو كمجموعة من النقط أو الغبار بدلاً من سلسلة من القطع المستقيمة.

(٦) يمكننا بسهولة التحقق من خصائص الفراكتلات : التشابه الذاتي ، الخشونة.

(٤) مجموعات جوليا Julia sets:

قدم الرياضي الفرنسي جوليا Julia وهو في الخامسة والعشرين من عمره،وذلك في عام ١٩١٨ مجموعته، وتعتبر مفاهيم العدد المركب والعدد الحقيقي هامه للمساعدة على فهمها وتكوينها، (شكل ٤) وتتكون كالتالي:



شكل (٤)

مجموعات جـــولـــيا

١- اذا كانت لدينا $س^{٢}+ج$ ، ان التكرار يعني ان نثبت ج ونختار قيم س

٢- سوف نعوض بقيم س ونوجد قيمة $س^{٢}+ج$

٣- من خلال التحكم في قيمة ج سوف نحصل علي مجموعة متتابعة من الأعداد المركبة:

$س \leftarrow س^{٢}+ج \leftarrow (س^{٢}+ج)^{٢}+ج \leftarrow [(س^{٢}+ج)^{٢}+ج]^{٢}+ج \leftarrow .....$

هذه المتتابعة يجب ان يكون لها واحدة من الخاصيتين التاليتين :

*اما ان تصبح المتتابعة غير محددة(مطلقه) : اي ان عناصر المتتابعة تترك اي دائرة حول الأصل.

*أو تبقى المتتابعة محددة : اي يوجد دائرة حول الأصل التي لاتترك المتتابعة.

وتجمع النقط يؤدي الى أول نوع من الأشكال يسمى مجموعة الهروب ل ج.بينما التجمع الثاني للنقط يؤدي الى ثاني نوع من الأشكال تسمى المجموعة المأسورة ل ج. وكلامن هاتين المجموعتين ليستا خاليتين. وكلا منهما تغطي جزءا من المستوي المركب وتكمل كل منهما الأخرى وهو ما يسمي

بمجموعات جوليا ل ج، والملاحظ ان خاصية التشابه الذاتي لمجموعات جوليا لها طبيعة مختلفة بالمقارنة مع مثلث سيربنسكي مع وجود تركيبات متكرره بقياسات مختلفة.

بحوث مرتبطة بهندسة الفراكتال:

مع التطور التكنولوجي وظهور الآلات الحاسبة البيانية Graphic Caculatorوكذلك التوسع في البرامج التعليمية للرياضيات بالكمبيوتر ازدادت وتعمقت البحوث في مجال الفراكتال وتطبيقاتها في مجالات العلوم والهندسة والرياضيات ، ويمكن الحصول علي العديد من المواقع علي شبكة المعلومات Internet والمتخصصة فقط في تقديم الجديد والمبتكر من هندسة الفراكتال. ومع ذلك تعتبر البحوث التربوية لتضمين هندسة الفراكتال في برامج الرياضيات المدرسية أو الجامعية محدودة، وسوف اشير هنا الي بعض الدراسات والبحوث التي اعتمد عليها الباحث في اعداده للوحدة التجريبية المقترحة:

دراسة كامب Camp (Camp,1999):

حاولـــت هذه الدراسة تقديم تصور واضح حول هندسة الفراكتال وذلك من خلال البحث التاريخي في البيئة والطبيعة ، ثم بدراسة سيرة وحياة من أثروا بفكرهم في هندسة الفراكتال مثل ماندیلبروت وذلك لتوضـــيح كـــيف أثـــرت حياته في تلك الأكتشافات الرياضية، وقد أوضحت الدراسة اهمية تطبيقات هندسة الفراكتال وكذلك تضمينها في برامج تعليم الرياضيات.

دراسة لانجيل Langille (Langille,1997):

قدمـــت الدراســـة محـــاولات استطلاعية لتقديم هندسة الفراكتال لأثني عشرة فصلا في الرياضيات، فاشارت الى بعض الطرق التي تم توظيفها لأكساب الطلاب للمفاهيم المتضمنه في الوحدة الدراسية ، ومـــن بين اهم ما قدمته الدراسه هو أسئلة المقابلة مع الطلاب التي اشتملت علي اكتشاف الطرق التي يبنـــي بها الطلاب معارفهم بالفراكتلات ، وقد اظهرت الدراسة ان هناك موضوعات في الفراكتلات تحـــتاج اهتماما خاصا، وقد شكلت المفاهيم الأساسية لهندسة الفراكتال مثل التشابه الذاتي صعوبة لدي الطـــلاب وكذلك فقد اكتسبوا خبرات بصعوبةفي الخصائص المميزة للفراكتلات ،ومن بين ما اظهرته نـــتائج الدراســـه انـــه يجـــب السماح بتقديم قصص حول الموضوع المقدم ، فهندسة الفراكتال ليست موضـــوعا يمكـــن تقديمـــه في اسبوعين مثلا لأن تطبيقات الموصوعات يجب ان تكون حلزونية في الطبيعة لتجنيب الطلاب الغموض في بعض المفاهيم الجديدة عليهم في هذة الوحدة.

دراسة ماكي Mckee (Mckee,1997):

هدفـــت الدراســـة الـــي تحليل وصفي من خلال الملاحظة والمقابلات والتسجيلات لأنشطة الطلاب بالصـــف التاســـع المرتبطة بأعمالهم في هندسة الفراكتال التي قدمت لهم من خلال أسئلة استقصائية موضـــوعات في الطبيعة. وأظهرت نتائج الدراسة ارتباطات قوية بين هندسة الفراكتال وموضوعات

الرياضيات وقد ازدادت ثقة الطلاب وادراكاتهم حول كيفية تكوين الأنماط وعمل التكرارات واكتشاف التشابه الذاتي للأشكال الهندسية والأشياء في الطبيعة.

دراسة فاك Vacc (Vacc,1992):

فـــي هذه المقالة قدمت دراسة حالة لتقويم مدى امكانية تدريس المفاهيم الأساسية لهندسة الفراكتال لأطفـــال المدرســـة الأبتدائية وكذلك لتحديد فاعلية تقديم تلاميذ المدرسة الأبتدائية لدرس امام معلمين للرياضيات ، وقد اظهرت الدراسة ان المفاهيم البسيطة لهندسة الفراكتال يمكن تقديمها وتكون مناسبة لمنهج رياضيات المدرسة الأبتدائية.

دراسة ايجناتوف Egnatoff (Egnatoff,1991):

قدمت الدراسة هندسة الفراكتال من خلال أمثلة حسابية لأكتشاف أطوال السواحل والمنحنيات ذاتية التشـــابه ، بالأضافة الي انشطة اخرى، وقد قدمت هذة الأكتشافات من خلال الخوارزميات وتطبيقات بـــرامج الكمبيوتر البسيطة التي قادت الطلاب بأنفسهم لدراسات وعمل مشروعات طلابية متقدمة في هندسة الفراكتال.

وقد استفادت الدراسة الحالية مماسبق في التالي:

(١) اهمـــية ربط موضوعات هندسة الفراكتال بموضوعات الرياضيات وخبرات الرياضيات السبقة للطلاب.

(٢) اســـتخدام طـــرق تدريـــس ترتـــبط بفاعلية المتعلمين اكثر من تقديم المعلم لكل الأفكار، وان استخدامات للأنشطة الكشفية في تدريس هندسة الفراكتال يمكن ان يكون فعالا.

(٣) تعتبر انشطة الكمبيوتر المرتبطة بهندسة الفراكتال اساسية لتكوين الأشكال وبحث مكوناتها من حيث خصائص التشابه الذاتي المتضمنة فيها.

(٤) الأســـتخدام الفعـــال لأنشـــطة ترتـــبط بمواقع هندسة الفراكتال يثري من عمليات البحث عن الجماليات المتضمنة في الفراكتلات في الطبيعة.

(٥) تنظيم وحدة هندسة الفراكتال وفقا لأسس ترتبط بالخبرات الرياضية للطلاب وكذلك مدى توافر الأمكانات المادية من حيث اجهزة الكمبيوتر لتدريسها.

الدراسة التجريبية

أولا: اعداد وحدة "هندسة الفراكتال":

تم اعداد وحدة هندسة الفراكتال في ضوء المباديء التالية:

(١) ان طلاب الرياضيات بالسنة الرابعة بكلية التربية لديهم الخبرات الرياضية اللازمة لدراسة هندسة الفراكتال.

(٢) امكانية اعداد محتوى تعليمي لهندسة الفراكتال يرتبط بالرياضيات المدرسية المتوقع ان يقوم طلاب الرياضيات بكلية التربية بتدريسها عقب تخرجهم.

(٣) امكانية دمج الوحدة المقترحة في مقررات طرق تدريس الرياضيات بكلية التربية.

وتأسيسا على هذة المباديء، ونتائج الدراسات السبقة، وكذلك حدود البحث، فقد اشتملت الوحدة المقترحة على التالي:

(١) أهداف الوحدة

(٢) المتطلبات الرياضية اللازمة لدراسة الوحدة

(٣) المفاهيم والمهارات الأساسية لوحدة هندسة الفراكتال

(٤) موضوعات الوحدة

(٥) الأنشطة والوسائل التعليمية اللازمة للوحدة

(٦) المصادر والمراجع المناسبة

(٧) اساليب التقويم المقترحة

تم عرض الوحدة المقترحة على مجموعة من المحكمين اشتملت على اساتذة الرياضيات بكلية العلوم بجامعة السلطان قلبوس وكذلك بعض اعضاء هيئة التدريس بكلية التربية وذلك للتأكد من صدق المحتوى العلمي للوحدة ومدى مناسبته لطلاب الرياضيات بكلية التربية. وقد تمت التعديلات التي اشار اليها المحكمون حتى اصبحت الوحدة في صورتها النهائية٠(ملحق ١)

ثانيا : اعداد اختبار تحصيلي لوحدة "هندسة الفراكتال":

(١)هدف الأختبار:

يهدف الأختبار الى قياس تحصيل الطلاب للمفاهيم والمهارات الرياضية المتضمنة في وحدة "هندسة الفراكتال" وذلك قبل دراستهم لموضوعات الوحدة ، وكذلك بعد دراستهم لها لتعرف مدى اكتساب الطلاب لمكونات الوحدة المقترحة.

(٢)تحديد مفردات الأختبار:

من خلال اطلاع الباحث على بعض الدراسات في مجال هندسة الفراكتال مثل (Peitgen,1992; Crilly,1991; Barnsley,1998 and Benson,1993) ونظرا لقلة الأختبارات التحصيلية لهندسة الفراكتال في البحوث التي اطلع عليها الباحث ، فقد تم استشارة مجموعة من المهتمين في مجال هندسة الفراكتال بالولايات المتحدة من خلال البريد الألكتروني E-mail مثل Camp Dan R. بولاية الينوي وكذلك Michael Naylor بولاية فلوريدا اللذين قدما للباحث آراء وأفكارا جيدة من خلال خبراتهم في تدريس هندسة الفراكتال ، وذلك لتكوين مفردات مناسبة للأختبار ، وقد تم اعداد مجموعة من الأسئلة المفتوحة نظرا لطبيعة العلاقات الرياضية المتضمنة في الفراكتال بلغت ١٢ سؤالا ، وتم اختصارها بعد عرضها علي مجموعة من

المحكميـــن بقســـم الرياضـــيات بكلية العلوم ، فبلغ عدد الأسئلة في الأختبار ٨ اسئلة في موضوعات الوحدة المقترحة وذلك وفقا للوزن النسبي المبين في جدول رقم (١).

جدول رقم (١)

الوزن النسبي لعدد أسئلة اختبار "هندسة الفراكتال"

م	الموضوع	الوزن النسبي	عدد الأسئلة
١	التكرارات الهندسية	%٥٠	٤
٢	خواص الفراكتال	%٢٥	٢
٣	هندسة الفراكتال التقليدية	%٢٥	٢
	المجموع		٨

(٤) واجهت الباحث صعوبة في التجريب الأولي للأختبار لتحديد ثبلت الأختبار ، وكذلك حساب الصـــدق الذاتـــي له، نظـــرا لضعف الخلفية المعرفية لطلاب الرياضيات بكلية التربية في موضوع هندسة الفراكتال، وقد اعتمد الباحث في ذلك علي خبرات طلاب الرياضيات بكلية العلـــوم الذيـــن درســـوا الفراكـــتال في مواقف رياضية بمقرراتهم الأخرى. وقد تم تطبيق الأختـــبار علـــى مجموعـــة من هؤلاء الطلاب بلغت ١١ طالبا وذلك لحساب الخصائص السيكومترية للأختبار.

بلغـــت قـــيمة ثـــبات الأختبار باستخدام معادلة ألفا كرونباخ لقياس معامل الأتساق الداخلي للأختـــبار ٦٣، وهـــى درجـــة ثـــبات يمكن الأعتماد عليها ، ونظرا لتعذر حساب صدق المحكميـــن ، فقـــد تم حساب الصدق الذاتي وهو ما يعادل الجذر التربيعي لثبات الأختبار حيث بلغ ٧٩،.

(٥) تكونـــت الصـــورة النهائـــية للأختـــبار من ثمانية أسئلة ، وأصبح الأختبار جاهزا للتطبيق لغرض البحث.(ملحق ٢)

ثالثا : تطبيق أدوات البحث:

نظـــرا لأن وحدة هندسة الفراكتال تعتبر وحدة جديدة بالنسبة لطلاب الرياضيات بكلية التربية فقد تم الأعتماد على التصميم التجريبي ذو المجموعة الواحدة حيث اختيرت مجموعة عشوائية من طلاب وطالـــبات تخصـــص الرياضـــيات/كمبـــيوتر الدارسين لمقرر "طرق تدريس الرياضيات ٢" لتجريب تدريس الوحدة المقترحة ، فبلغت مجموعة الطلاب ٢٥ طالبا وطالبة.

تـــم تطبـــيق الأختبار التحصيلي قبل البدء في تقديم الوحدة المقترحة وتصحيحة واعداد نتائجة. ثم قام الباحـــث بتدريس الوحدة المقترحة للطلاب وذلك من خلال مقرر طرق تدريس الرياضيات وذلك لمدة ثلاثـــة اسابيع بمعدل ١٠ ساعات تدريسية (على اساس ساعتين في الجانب النظري و ثمانية ساعات

فـــي الجانـــب التطبيقـــي) وهو معدل مناسب بالنسبة لمكونات المحتوى التعليمي للوحدة ، وقد اشتمل التدريس على تطبيقات كمبيوترية وكذلك عرض لشرائح متنوعة لتوضيح ارتباط الفراكتلات بالأشياء في الطبيعة.

تم تطبيق الأختبار التحصيلي بعد تدريس الوحدة مباشرة واعداد نتائج تطبيق الأختبار البعدي.

رابعا : نتائج البحث:

للـــتحقق مـــن دلالـــة الفـــروق في تحصيل الطلاب للمجموعة التجريبية للمفاهيم والمهارات المتضمنة في وحدة هندسة الفراكتال فقد تم استخدام اختبار ت من خلال برنامج spss v. 10.0.1 علـــى نـــتائج تطبـــيق الأختبار التحصيلي القبلي والنعدي ، وقد جاءت نتائج التحليل الأحصائي كما بجدول رقم (٢).

جدول رقم (٢)

دلالة الفروق بين تحصيل المجموعة التجريبية القبلي والبعدي في الأختبار التحصيلي لوحدة هندسة الفراكتال

	المتوسط	الأنحراف المعياري	عدد الطلاب	درجات الحرية	ت	الدلالة
التطبيق القبلي	٢١ ،٩٢	٤ ،٩٩	٢٥	٢٤	٢١ ،٩٢	،٠٠٠
التطبيق البعدي	٣١ ،٨٠	٤ ،١٩	٢٥	٢٤	٣٧ ،٩٢	

يتضـــح من الجدول السابق ان قيمة ت دالة عند مستوى < ،٠٠١، وهذا يدل على وجود فروق دالة احصـــائيا بين نتائج تطبيق الأختبار القبلي والبعدي وان هذة الفروق لصالح التحصيل البعدي لطلاب المجموعة التجريبية.

ويرجع الباحث هذة النتيجة الي التالي:

(١) انخفـــاض درجـــات الطـــلاب في الأختبار القبلي للوحدة يعود الى ضعف الخبرات الرياضية المرتبطة بهندسة الفراكتال عند الطلاب نظرا لجدة الموضوع بالنسبة لدراستهم.

(٢) علـــى الـــرغم من ظهور نتائج فردية جيدة في الأختبار القبلي للوحدة فان ذلك لم يكن مؤشرا كافـــيا للـــتحقق من اكتساب كل الطلاب للمعارف والمهارات المتضمنة في اسئلة الأختبار ، وبسؤال الباحث لهؤلاء الطلاب عن درجاتهم المرتفعة فقد اتضح ان لديهم خلفية محدودة حول موضـــوع هندسة الفراكتال وذلك من خلال نشاطات فردية للطلاب في مواقع للرياضيات في شبكة الأنترنت.

(٣) ارتفعت نتائج الطلاب في التطبيق البعدي للأختبار وذلك نتيجة للتالي:

- ارتباط اسئلة الأختبار بموضوعات الوحدة.

- الأنشطة المتعددة التي تضمنتها الوحدة، خاصة العمل على مواقع الأنترنت المرتبطة بهندسة الفراكتال والتي أثرت تفكيرهم واكسبتهم الثقة في تعرف مفاهيم الوحدة المقترحة.
- دافعية الطلاب نحو تعلم هندسة الفراكتال نظرا لجدة الموضوع بالنسبة لهم ومكوناته المرتبطة بالأشكال فى الطبيعة.
- استخدام طرق تدريس ترتبط بالجوانب العملية وتفاعل الطلاب مع المادة التعليمية ومع بعضهم فى مقارنة اعمالهم.

(٤) هذة النتائج تتفق مع ماأظهرته وأشارت الية نتائج الدراسات والبحوث السابقة .

مما سبق يمكن استخلاص نتائج البحث في التالي:

١- يمكن تأسيس وتصميم وحدة في هندسة الفراكتال للطلاب المعلمين للرياضيات وتضمينها في مقرر لطرق تدريس الرياضيات من الجانب التربوي لبرنامج اعداد معلمي الرياضيات.

٢- يمكن اكساب الطلاب المعلمين للمعارف والمهارات المتضمنة في هندسة الفراكتال ويستدل على ذلك من خلال ارتفاع متوسط درجات الطلاب في الأختبار التحصيلي البعدي لهندسة الفراكتال.

٣- يمكن تضمين موضوعات هندسة الفراكتال في وحدة قائمة بذاتها للطلاب المعلمين.

٤- أظهر الطلاب دافعية كبيرة نحو دراسة هندسة الفراكتال ، وقد ظهر ذلك من خلال اهتماماتهم بتعرف مواقع جديدة للفراكتال بالأنترنت ، وقد تنافس الطلاب في التوصل الى اجمل الأشكال الفراكتالية.

٥- تعتبر الأنشطة التعليمية المرتبطة باعداد شرائح وصور طبيعية من أكثر العناصر التي اهتم بها الطلاب اثناء دراستهم لهندسة الفراكتال.

توصيات البحث:

من خلال نتائج البحث فانه يمكن تقديم التوصيات التالية:

(١) دمج هندسة الفراكتال كموضوع دراسي اثرائي في مقرر لطرق تدريس الرياضيات للطلاب المعلمين بكلية التربية.

(٢) اعداد أدوات تقييم مناسبة فى هندسة الفراكتال لمساعدة المعلمين فى استخدام الطرق المناسبة لتقويم الطلاب.

(٣) تضمين هندسة الفراكتال في مناهج الرياضيات بالمراحل التعليمية المختلفة وبمستويات مناسبة.

المراجع

عبـــيد ، ولـــيم (١٩٩٨).رياضـــيات مجتمعـــية لمواجهـــة تحديات مستقبلية مع بداية القرن الحادي والعشرين، ***تربويات الرياضيات- المجلد الأول - ديسمبر١٩٩٨ - ص ٣-٨ .***

1- Barnsley,Michael (1998).***Fractals Everywhere***,Academic press,INC. USA.
2- Benson,John and others(1993).***Gateways to Algebra and Geometry:An integrated approach***,McDougal,Littll &Company,New York.
3- Camp,Dan R.(1999). A Cultural history of Fractal Geometry:The biography of an idea,Ph.D, ***Loyola University of Chicago, AAC 9917760,D.A.***
4- Camp,Dan R.(2000). Benoit Mandelbort: The Euclide of Fractal Geometry, ***Mathematics Teachers,v 93,N 8, November 2000,pp.708-712***.
5- Clapham, Christorpher (1996). **The Concise Oxford Dictionary of Mathematics**, Second Edition, Oxford University Press.
6- Crilly A.J. and others(1991). ***Fractals and Chaos***, Springer-Verlage,New York,Inc.
7- Egnatoff,William J.(1991). Fractal Explorations in Secondary Mathematics, Science and Computer science, ***Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, V 10,N 2, pp.21-42,win 1990-91***.
8- Glerick, James (1987). **Chaos**. New York: Penguin Books.
9- Gray, Shirley B.(1992). Fractal Math.,***Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,V 11,N 1,pp.31-38, 1992***.
10- Langille, Michael (1997). Students' Sense making of Fractal Geometry, Msc, ***Simon Fraser University, (Canada), AAC MM16962 , D.A***.
11- *McGuire, Michael (1991).* ***An Eye for Fractuls: A Graphic and photographic Essay****. Redwood City, Calif: Addison-Wesley publishing Co., 1991.*
12- Mckee,Riva (1997). Students Making Connections through Interactions with Fractal Geometry Activities, MED, ***Memorial University of Newfoundation (Canada) ,AAC MM17623, D.A***.
13- *Naylor, Michael (1999). Exploring Fractuls in the Classroom,* ***Mathematics Teacher, V. 92, N.4, April 1999, pp. 360-364****.*
14- *Peitgen, Herinz-Otto and Others (1992).* ***Fractals for the Classroom: Strategic Activities. Vol. 1,*** *New York: Springer – Verlag and Reston, Va: NCTM.*
15- *Randi, L. & Westerberg, Judy (1999). Fractals in high school: Exploring a New Geometry,* ***Mathematics Teachers, V. 92, N 3, March 1999, pp. 260-265****.*
16- Vacc,-Nancy-Nesbitt(1992). Fractal Geometry in Elementary School Mathematics, ***Journal of Mathematical Behavior, V 11,N 3 ,pp.279-289.,sept 1992.***