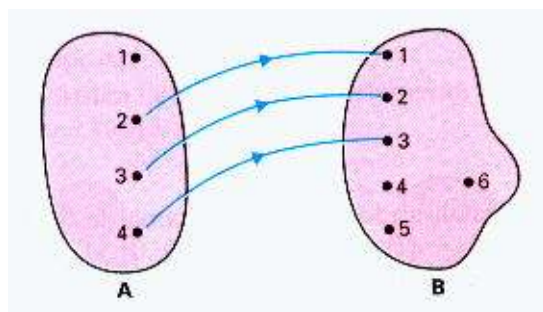


FUNÇÕES

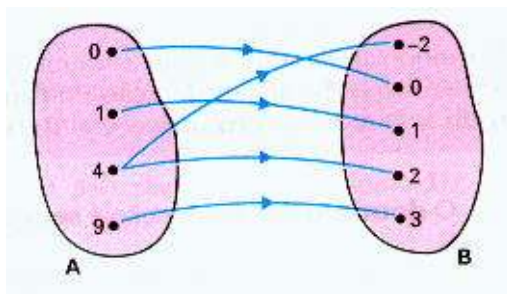
O conceito de função é um dos mais importantes em toda a matemática. O conceito básico de função é o seguinte: toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder **a todo** elemento do primeiro conjunto **um único** elemento do segundo, ocorre uma função.

O uso de funções pode ser encontrado em diversos assuntos. Por exemplo, na tabela de preços de uma loja, a cada produto corresponde um determinado preço. Outro exemplo seria o preço a ser pago numa conta de luz, que depende da quantidade de energia consumida.

Observe, por exemplo, o diagrama das relações abaixo:

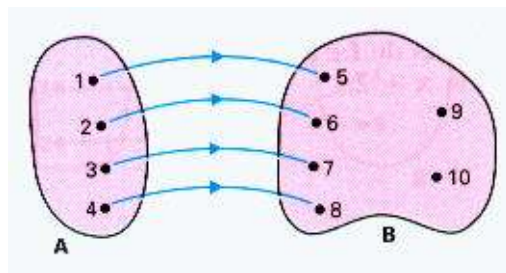


A relação acima não é uma função, pois existe o elemento **1** no conjunto **A**, que não está associado a nenhum elemento do conjunto **B**.



A relação acima também não é uma função, pois existe o elemento **4** no conjunto **A**, que está associado a mais de um elemento do conjunto **B**.

Agora preste atenção no próximo exemplo:



A relação acima é uma função, pois todo elemento do conjunto **A**, está associado a **somente um** elemento do conjunto **B**.

De um modo geral, dados dois conjuntos **A** e **B**, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma **função de A em B** se e somente se, **para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$** de modo que x se relacione com y .

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO:

O **domínio** de uma função é **sempre** o próprio conjunto de partida, ou seja, $D=A$. Se um elemento $x \in A$ estiver associado a um elemento $y \in B$, dizemos que **y** é a **imagem** de **x** (indica-se $y=f(x)$ e lê-se “**y** é igual a **f** de **x**”).

Exemplo: se **f** é uma função de \mathbb{N} em \mathbb{N} (isto significa que o domínio e o contradomínio são os números naturais) definida por $y=x+2$. Então temos que:

- A imagem de 1 através de **f** é 3, ou seja, $f(1)=1+2=3$;
- A imagem de 2 através de **f** é 4, ou seja, $f(2)=2+2=4$;

De modo geral, a imagem de **x** através de **f** é $x+2$, ou seja: $f(x)=x+2$.

Numa função **f** de **A** em **B**, os elementos de **B** que são imagens dos elementos de **A** através da aplicação de **f** formam o **conjunto imagem** de **f**.

Com base nos diagramas acima, concluímos que existem **2** condições para uma relação **f** seja uma função:

1ª) O domínio deve sempre coincidir com o conjunto de partida, ou seja, **todo elemento de A** é ponto de partida de flecha. Se tivermos um elemento de **A** do qual não parta flecha, a relação não é função.

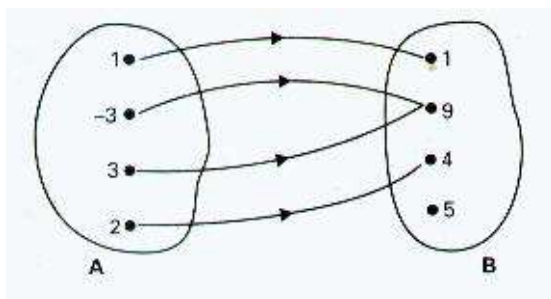
2ª) De cada elemento de **A** deve partir **uma única** flecha. Se de um elemento de **A** partir mais de uma flecha, a relação não é função.

Observações:

- Como x e y têm seus valores variando nos conjuntos **A** e **B**, recebem o nome de **variáveis**.
- A variável x é chamada **variável independente** e a variável y , **variável dependente**, pois para obter o valor de y dependemos de um valor de x .
- Uma função f fica definida quando são dados seu domínio (conjunto **A**), seu contradomínio (conjunto **B**) e a lei de associação $y=f(x)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Considere a função $f: A \rightarrow B$ representada pelo diagrama a seguir:



Determine:

- o domínio (**D**) de f ;
- $f(1)$, $f(-3)$, $f(3)$ e $f(2)$;
- o conjunto imagem (**Im**) de f ;
- a lei de associação

Resolução:

- O domínio é igual ao conjunto de partida, ou seja, $D=A$.
- $f(1)=1$, $f(-3)=9$, $f(3)=9$ e $f(2)=4$.
- O conjunto imagem é formado por todas as imagens dos elementos do domínio, portanto: $Im = \{1, 4, 9\}$.
- Como $1^2=1$, $(-3)^2=9$, $3^2=9$ e $2^2=4$, temos $y=x^2$.

2) Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, o domínio e o contradomínio são os números reais) definida por $f(x)=x^2-5x+6$, calcule:

- $f(2)$, $f(3)$ e $f(0)$;
- o valor de x cuja imagem vale 2.

Resolução:

a) $f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$
 $f(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$
 $f(0) = 0^2 - 5(0) + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$

- b) Calcular o valor de x cuja imagem vale 2 equivale a resolver a equação $f(x)=2$, ou seja, $x^2 - 5x + 6 = 2$. Utilizando a fórmula de Bhaskara encontramos as raízes 1 e 4. Portanto os valores de x que têm imagem 2 são 1 e 4.

OBTENÇÃO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO:

- O **domínio** é o subconjunto de \mathbb{R} no qual todas as operações indicadas em $y=f(x)$ são possíveis.

Vamos ver alguns exemplos:

1) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

Como $\sqrt{2x - 4}$ só é possível em \mathbb{R} se $2x - 4 \geq 0$, ou seja, $x \geq 2$, então,

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$$

2) $f(x) = \frac{5}{x+1}$

Como $x+1$ é denominador, ele não poderá ser nulo (pois não existe divisão por zero).

Portanto $x+1 \neq 0$, ou seja, $x \neq -1$. Então :

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$$

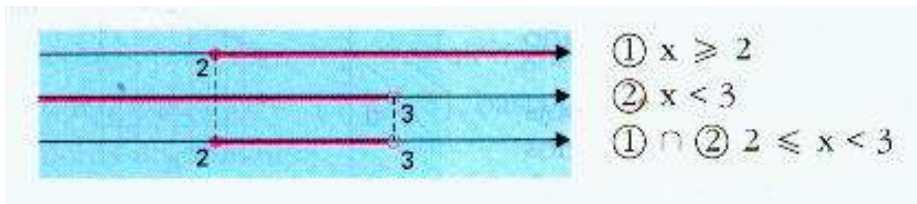
3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$

Vamos analisar primeiro o numerador : como $x - 2$ está dentro da raiz, então devemos ter

$$x - 2 \geq 0, \text{ ou seja, } x \geq 2 \text{ (condição 1)}$$

Agora o denominador: como $3-x$ está dentro da raiz devemos ter $3-x \geq 0$, mas além disso ele também está no denominador, portanto devemos ter $3-x \neq 0$. Juntando as duas condições devemos ter: $3-x > 0$, ou seja, $x < 3$ (condição 2).

Resolvendo o sistema formado pelas condições 1 e 2 temos:



Devemos considerar o intervalo que satisfaz as duas condições ao mesmo tempo.
Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$.

CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO CARTESIANO DE UMA FUNÇÃO

Para construir o gráfico de uma função f , basta atribuir valores do domínio à variável x e, usando a sentença matemática que define a função, calcular os correspondentes valores da variável y . Por exemplo, vamos construir o gráfico da função definida por $y = x/2$. Escolhemos alguns valores para o domínio. Por exemplo $D = \{2, 4, 6, 8\}$, e agora calculamos os respectivos valores de y . Assim temos:

$$x=2 \rightarrow y=2/2 = 1$$

$$x=4 \rightarrow y=4/2 = 2$$

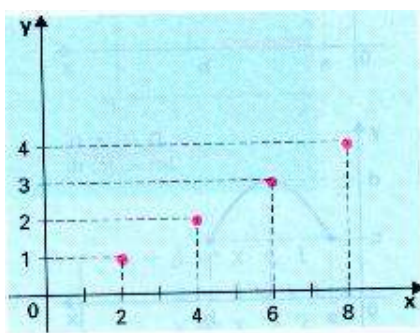
$$x=6 \rightarrow y=6/2 = 3$$

$$x=8 \rightarrow y=8/2 = 4$$

Então montamos a seguinte tabela:

x	y
2	1
4	2
6	3
8	4

Identificamos os pontos encontrados no plano cartesiano:

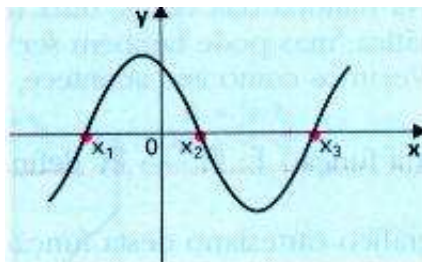


O gráfico da função será uma reta que passará pelos quatro pontos encontrados. Basta traçar a reta, e o gráfico estará construído.

Obs: para desenhar o gráfico de uma reta são necessários apenas dois pontos. No exemplo acima escolhemos 4 pontos, mas bastaria escolher dois elementos do domínio, encontrar suas imagens, e logo após traçar a reta que passa por esses 2 pontos.

RAÍZES DE UMA FUNÇÃO

Dada uma função $y=f(x)$, os valores, os valores de x para os quais $f(x)=0$ são chamados **raízes** de uma função. No gráfico cartesiano da função, as raízes são abscissas dos pontos onde o gráfico corta o eixo horizontal. Observe o gráfico abaixo:



No gráfico acima temos: $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$ e $f(x_3)=0$.

Portanto x_1 , x_2 e x_3 são raízes da função.

PROPRIEDADES DE UMA FUNÇÃO

Essas são algumas propriedades que caracterizam uma função $f:A \rightarrow B$:

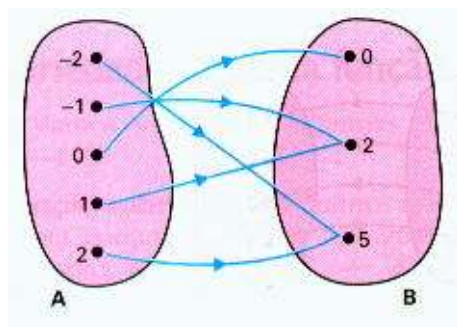
- a) **Função sobrejetora:** Dizemos que uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for igual ao contradomínio, isto é, se $Im=B$. Em outras palavras, não pode sobrar elementos no conjunto B sem receber flechas.
- b) **Função Injetora:** A função é injetora se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem. Portanto não pode haver nenhum elemento no conjunto B que receba duas flechas. Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x$ é injetora pois se $x_1 \neq x_2$ então $3x_1 \neq 3x_2$, portanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- c) **Função Bijetora:** Uma função é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo. Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y=3x$ é injetora, como vimos no exemplo anterior. Ela também é sobrejetora, pois $Im=B=\mathbb{R}$. Logo, esta função é bijetora.
Já a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $y=x+5$ **não** é sobrejetora, pois $Im=\{5,6,7,8,\dots\}$ e o contradomínio $CD=\mathbb{N}$, mas é injetora, já que valores diferentes de x têm imagens distintas. Então essa função **não** é bijetora.

Observe os diagramas abaixo:

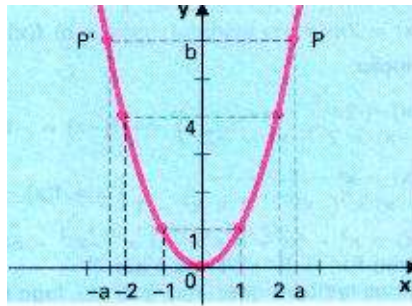
	<ul style="list-style-type: none"> Essa função é sobrejetora, pois não sobra elemento em B Essa função não é injetora, pois existem dois elementos com mesma imagem Essa função não é bijetora, pois não é injetora
	<ul style="list-style-type: none"> Essa função é injetora, pois elementos de B são “flechados” só uma vez. Essa função não é sobrejetora, pois existem elementos sobrando em B Essa função não é bijetora, pois não é sobrejetora
	<ul style="list-style-type: none"> Essa função é injetora, pois elementos de B são “flechados” só uma vez. Essa função é sobrejetora, pois não existem elementos sobrando em B A função é bijetora, pois é injetora e sobrejetora

FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, dizemos que **f** é **par** se, e somente se, $f(x)=f(-x)$ para todo $x \in A$. Ou seja: os valores simétricos devem possuir a mesma imagem. O diagrama a seguir mostra um exemplo de função par:

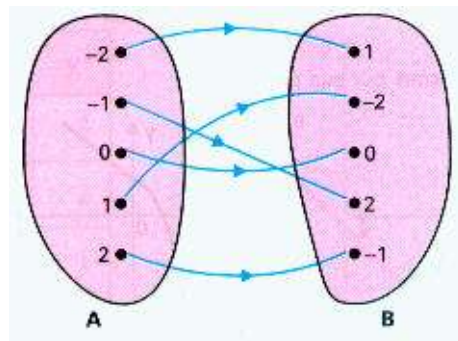


Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ é uma função par, pois $f(x)=x^2=(-x)^2=f(-x)$. Podemos notar a paridade dessa função observando o seu gráfico:

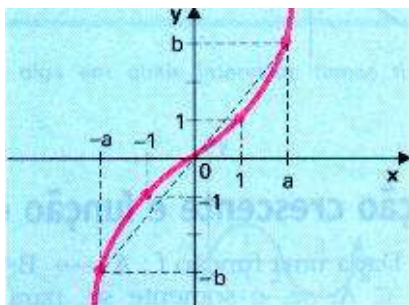


Notamos, no gráfico, que existe uma **simetria em relação ao eixo vertical**. Elementos simétricos têm a mesma imagem. Os elementos 2 e -2 , por exemplo, são simétricos e possuem a imagem 4.

Por outro lado, dada uma função $f: A \rightarrow B$, dizemos que **f é ímpar** se, e somente se, $f(-x)=-f(x)$ para todo $x \in A$. Ou seja: valores simétricos possuem imagens simétricas. O diagrama a seguir mostra um exemplo de função ímpar:



Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3$ é uma função ímpar, pois $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. Podemos notar que a função é ímpar observando o seu gráfico:



Notamos, no gráfico, que existe uma **simetria em relação a origem 0**. Elementos simétricos têm imagens simétricas. Os elementos 1 e -1 , por exemplo, são simétricos e possuem imagens 1 e -1 (que também são simétricas).

Obs: Uma função que não é par nem ímpar é chamada *função sem paridade*.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

1) Classifique as funções abaixo em pares, ímpares ou sem paridade:

a) $f(x)=2x$

$f(-x) = 2(-x) = -2x \rightarrow f(-x) = -f(x)$, portanto **f é ímpar**.

b) $f(x)=x^2-1$

$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 \rightarrow f(x) = f(-x)$, portanto **f é par**.

c) $f(x)=x^2-5x+6$

$f(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6$

Como $f(x) \neq f(-x)$, então **f não é par**.

Temos também que $-f(x) \neq f(-x)$, logo **f não é ímpar**.

Por não ser par nem ímpar, concluímos que **f é função sem paridade**.

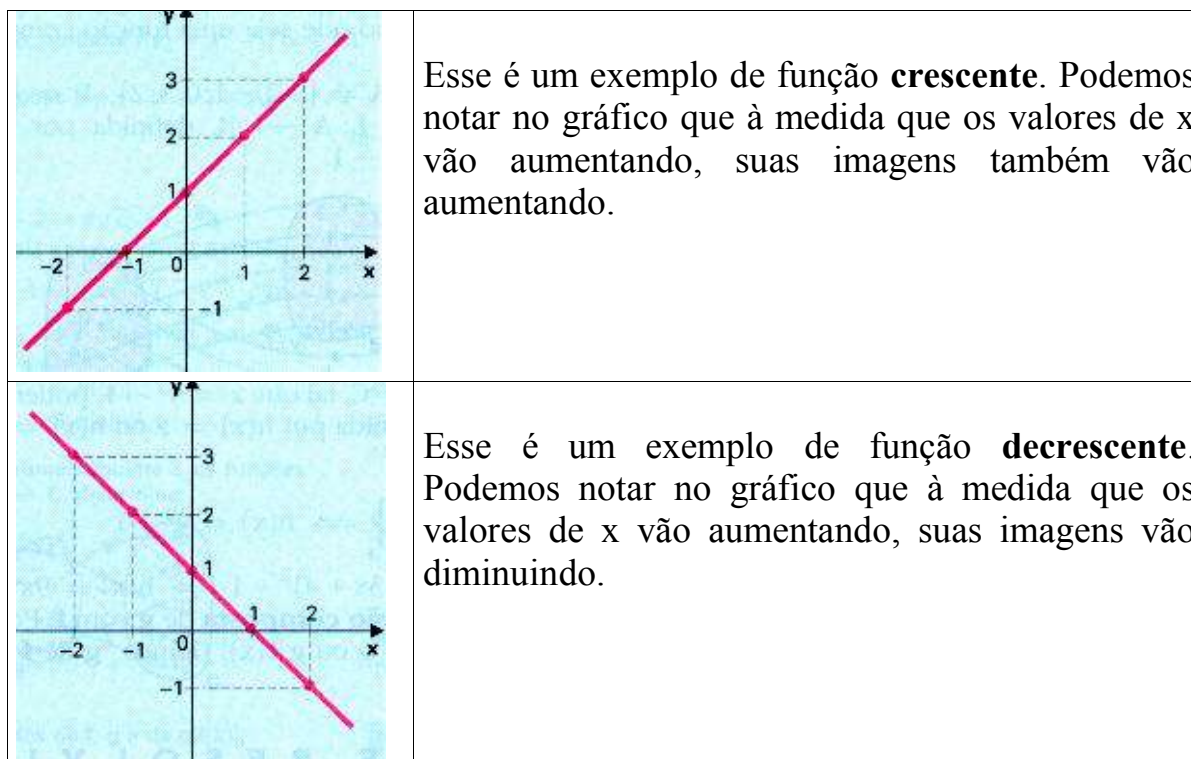
FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, dizemos que **f é crescente** em algum conjunto $A' \subset A$, se, e somente se, para quaisquer $x_1 \in A'$ e $x_2 \in A'$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+1$ é crescente em \mathbb{R} , pois $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja: quando os valores do domínio crescem, suas imagens também crescem.

Por outro lado, dada uma função $f: A \rightarrow B$, dizemos que **f é decrescente** em algum conjunto $A' \subset A$, se, e somente se, para quaisquer $x_1 \in A'$ e $x_2 \in A'$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

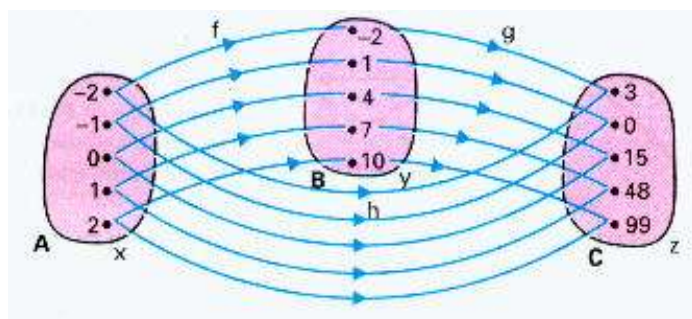
Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x+1$ é decrescente em \mathbb{R} , pois $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1+1 > -x_2+1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja: quando os valores do domínio crescem, suas correspondentes imagens decrescem.



FUNÇÃO COMPOSTA

Vamos analisar um exemplo para entender o que é uma função composta.

Consideremos os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$ e $C = \{3, 0, 15, 48, 99\}$, e as funções $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 3x+4$, e $g: B \rightarrow C$ definida por $g(y) = y^2 - 1$.



Como nos mostra o diagrama acima, para todo $x \in A$ temos um único $y \in B$ tal que $y=3x+4$, e para todo $y \in B$ existe um único $z \in C$ tal que $z=y^2-1$, então concluímos que existe uma função **h** de A em C, definida por $h(x)=z$ ou $h(x)=9x^2+24x+15$, pois:

$$h(x)=z \rightarrow h(x)=y^2-1$$

$$\text{E sendo } y=3x+4, \text{ então } h(x)=(3x+4)^2-1 \rightarrow h(x)=9x^2+24x+15.$$

A função $h(x)$ é chamada **função composta** de **g** com **f**. Podemos indicá-la por **g o f** (lemos “**g** composta com **f**”) ou $g[f(x)]$ (lemos “**g** de **f** de **x**”). Vamos ver alguns exercícios para entender melhor a idéia de função composta.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

- 1) Dadas as funções $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=2x$, calcule $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$.

Resolução:

$$f[g(x)] = f(2x) = (2x)^2 - 1 = 4x^2 - 1$$

$$g[f(x)] = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$$

- 2) Dadas as funções $f(x)=5x$ e $f[g(x)]=3x+2$, calcule $g(x)$.

Resolução:

$$\text{Como } f(x)=5x, \text{ então } f[g(x)] = 5 \cdot g(x).$$

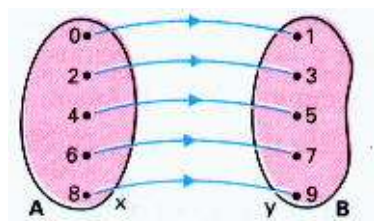
$$\text{Porém, } f[g(x)]=3x+2; \text{ logo } 5 \cdot g(x)=3x+2, \text{ e daí } g(x)=(3x+2)/5$$

- 3) Dadas as funções $f(x)=x^2+1$ e $g(x)=3x-4$, determine $f[g(3)]$.

$$\textbf{Resolução: } g(3)=3 \cdot 3 - 4 = 5 \rightarrow f[g(3)] = f(5) = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26.$$

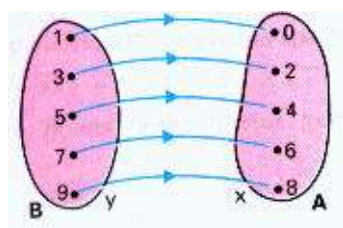
FUNÇÃO INVERSA

Consideremos os conjuntos $A=\{0,2,4,6,8\}$ e $B=\{1,3,5,7,9\}$ e a função $f:A \rightarrow B$ definida por $y=x+1$. A função **f** está representada no diagrama abaixo:



A função **f** é uma função **bijetora**. A cada elemento **x** de A está associado um único elemento **y** de B, de modo que $y=x+1$.

Porém, como **f** é bijetora, a cada elemento **y** de B está associado um único elemento **x** de A, de modo que $x=y-1$; portanto temos uma outra função $g:B \rightarrow A$, de modo que $x=y-1$ ou $g(y)=y-1$. Essa função está representada no diagrama abaixo:



Pelo que acabamos de ver, a função **f** leva **x** até **y** enquanto a função **g** leva **y** até **x**. A função $g:B \rightarrow A$ recebe o nome de **função inversa de f** e é indicada por **f⁻¹**.

O domínio de **f** é o conjunto imagem de **g**, e o conjunto imagem de **f** é o domínio de **g**. Quando queremos, a partir da sentença $y=f(x)$, obter a sentença de $f^{-1}(x)$, devemos dar os seguintes passos:

1º) Isolamos **x** na sentença $y=f(x)$

2º) Pelo fato de ser usual a letra **x** como símbolo da variável independente, trocamos **x** por **y** e **y** por **x**.

Por exemplo, para obter a função inversa de $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y=2x+1$, devemos:

1º) isolar **x** em $y=2x+1$. Assim $y=2x+1 \rightarrow y-1=2x \rightarrow x=(y-1)/2$

2º) trocar **x** por **y** e **y** por **x**: $y=(x-1)/2$.

Portanto a função inversa de **f** é: **f⁻¹(x)=(x-1)/2**.

Observação: Para que uma função **f** admita a inversa **f⁻¹** é necessário que ela seja bijetora. Se **f** não for bijetora, ela não possuirá inversa.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

1) Dada a função $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, ($x \neq -2$), calcule $f^{-1}(-1)$.

Resolução :

Sabemos que $y = \frac{x-1}{x+2}$ e devemos isolar x nessa igualdade

$$\text{Então : } y = \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow y(x+2) = x-1 \Rightarrow y.x + 2y = x-1 \Rightarrow y.x - x = -1-2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -(1+2y) \Rightarrow x = \frac{-(1+2y)}{y-1} \Rightarrow x = \frac{1+2y}{1-y}$$

Trocando x por y e y por x, obtemos : $y = \frac{1+2x}{1-x}$, ou seja $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{1-x}$.

$$\text{O valor de } f^{-1}(-1) \text{ é } f^{-1}(-1) = \frac{1+2(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2}.$$
