الفصل الخامس (وصف الحركة الموجية رياضياً)

إعداد/ أ. محمد الحيلة

الحركة التوافقية البسيطة :

تعريف الحركة التوافقية البسيطة: هي حركة اهتزازية تتناسب فيها الاستطالة (الإزاحة) تناسبا طردياً مع القوة الخارجية المؤثرة وتكون في اتجاه القوة.

$$ق = k\ س$$

حيث أن ق : القوة الخارجية المؤثرة على الجسم المثبت في الزنبرك .

k: ثابت هوك.

س : مقدار إزاحة الجسم عن موضع الاتزان .

ثابت هوك (k): هو مقدار القوة التي تحدث وحدة الاستطالة .

قوة الاسترداد (قَ): هي قوة تتولد في الزنبرك وهي تساوي وتضاد القوة الخارجية وتعمل على إعادة النظام إلى وضعه الأصلي .

أي أن $ق = - قَ$

$\therefore$ $قَ = - k\ س$ وهذا القانون يسمى قانون هوك

حيث قَ: قوة الاسترداد

ملاحظة: الإشارة السالبة في قانون هوك تعني أن اتجاه قوة الاسترداد مضاد لاتجاه الإزاحة دائماً.

تعريف آخر للحركة التوافقية البسيطة: هي حركة اهتزازية تتناسب فيها قوة الاسترداد طردياً مع الإزاحة وتكون في عكس اتجاهها.

ومن قانون نيوتن الثاني $ق = ك \times جـ$ حيث جـ هي العجلة

ومن قانون هوك نحصل على $جـ = - \frac{k}{ك} \times س$

وحيث أن $\frac{k}{ك}$ مقدار ثابت فإن

$جـ \propto - س$

تعريف آخر للحركة التوافقية البسيطة: هي الحركة التي تتناسب فيها العجلة طردياً مع الإزاحة وفي عكس اتجاهها .

ملاحظات:

١) عند موضع الاتزان الإزاحة تساوي صفر (س = ٠)

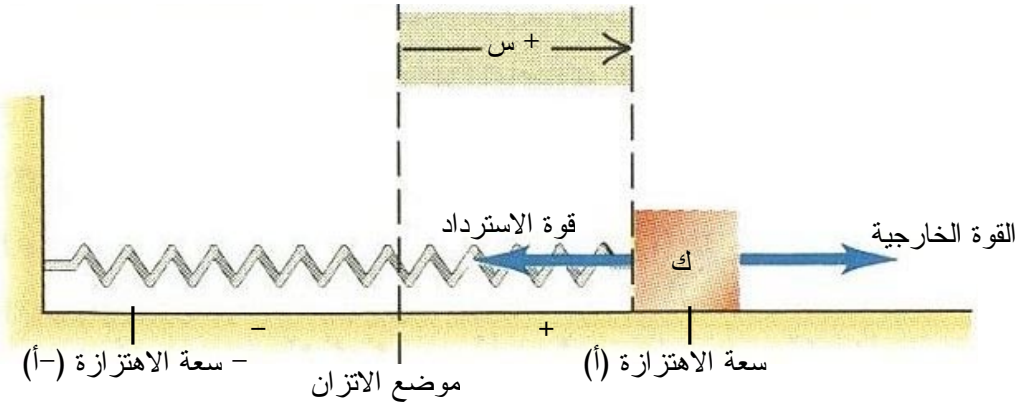
٢) يصل الجسم إلى أقصى إزاحة ممكنة (السعة) على جانبي موضع الاتزان والسعة متساوية على الجانبين .

٣) عند موضع الاتزان تكون السرعة اكبر ما يمكن وتنعدم السرعة عندما تكون الإزاحة مساوية للسعة .

٤) كلما زادت الإزاحة زاد التغير في السرعة (أي العجلة) لكنهما متضادان .

٥) عند زيادة القوة الخارجية المؤثرة فإن قوة الاسترداد تزداد .

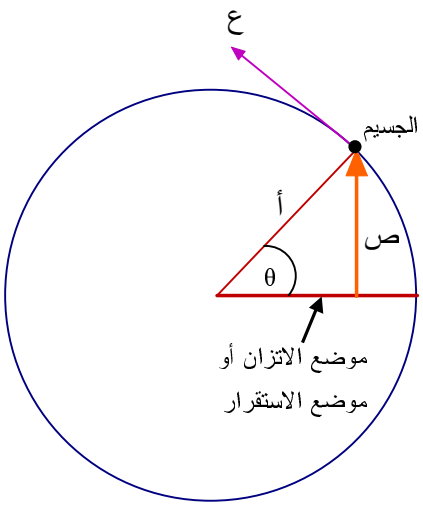
$ق \propto قَ \propto س \propto جـ$



الإزاحة والسرعة والعجلة في الحركة التوافقية البسيطة :

نفرض جسيم كتلته ك يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها أ في الاتجاه المبين وبسرعة زاوية (ω) ثابتة .

السرعة الزاوية (ω): هي معدل تغير الزاوية بالنسبة للزمن.



$$\omega = \frac{\theta}{ز}$$

$$\therefore \quad \theta = \omega ز$$

وأيضاً

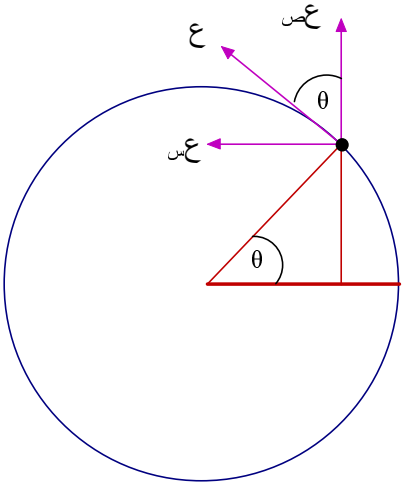
$$\theta = ٢\pi ت ز$$

حيث ت: هو التردد أي عدد الدورات التي يعملها الجسيم في الثانية .

تعيين الإزاحة :

هي البعد العمودي بين موضع الاتزان والجسيم أثناء حركته و الممثلة بالإزاحة ص .

ولإيجاد مقدار ص نستخدم حساب المثلثات ونحصل على أن



$$ص = أ \text{ حا } \theta$$

$$ص = أ \text{ حا } \omega ز$$

حيث

ص: هي إزاحة الجسيم .

أ: هي أقصى إزاحة للجسيم (السعة)

θ: هي زاوية الطور .

تعيين السرعة :

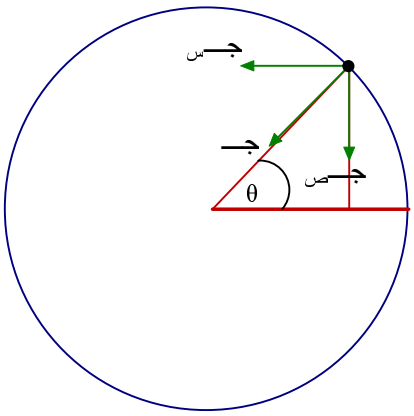
هي مركبة سرعة الجسيم على المحور الصادي.

$$ع_{ص} = \omega أ \text{ جتا } \omega ز$$

$$ع_{ص} = \omega \sqrt{أ^{٢} - ص^{٢}}$$

تعين العجلة :

هي مركبة عجلة الجسيم على المحور الصادي.



$$جـــ_{ص} = \omega^{٢} ص$$

$\omega^{٢}$ مقدار ثابت

$$\therefore \quad جـــ \propto ص$$

وهذا يعني أن حركة هذا الجسيم تعتبر توافقية بسيطة لأن إزاحته تتناسب طردياً مع عجلته التي يتحرك بها.

الطور:

تعريف الطور لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة: هي حالة الجسيم التي تتعلق بكل من موضعه (إزاحته) وسرعته واتجاه حركته في لحظة ما .

يعبر عن الطور بطريقتين :

١) مقدار الزاوية التي يمسحها نصف القطر حتى موضعه الحالي.

٢) بدلالة الزمن الذي يمضي منذ مروره بموضعه الأصلي حتى وصوله إلى موضعه الحالي في الاتجاه الموجب كجزء من الزمن الدوري .

ثابت الطور الأولي أو ثابت الطور أو الطور الأولي: هي حالة الجسيم (أي طوره) من حيث موضعه (إزاحته) وسرعته واتجاه حركته عند بدء الحركة .

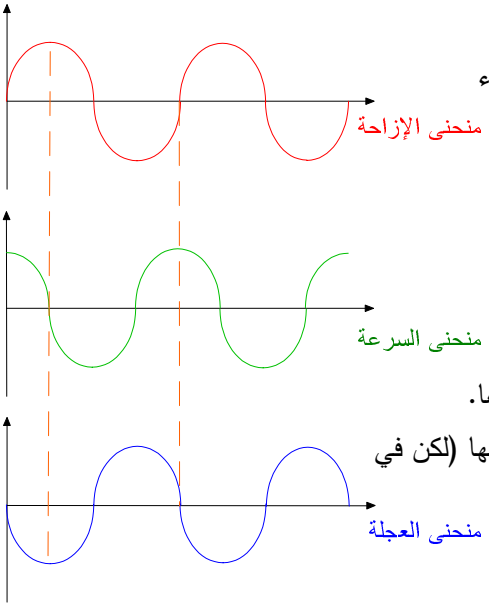
يقدر الطور الأولي بطريقتين :

١) مقدار الزاوية التي يمسحها نصف القطر في حركته من موضع الاستقرار إلى موضع الجسيم عند صفر التوقيت .

٢) الفترة الزمنية اللازمة للجسيم المهتز لقطع المسافة بين موضع الاستقرار وموضع الجسيم لحظة بدء التوقيت كجزء من الزمن الدوري .

فرق الطور لحركتين اهتزازيتين: هو الفرق بين ثابتي الطور للحركتين.

ملاحظة: بدء أو صفر التوقيت هو حسب اختيارنا لأي نقطة على الموجه واعتبارها بدء التوقيت .



العلاقة بين الإزاحة و السرعة والعجلة للحركة التوافقية البسيطة :

١) العجلة تتقدم السرعة في الطور بمقدار ٩٠° .

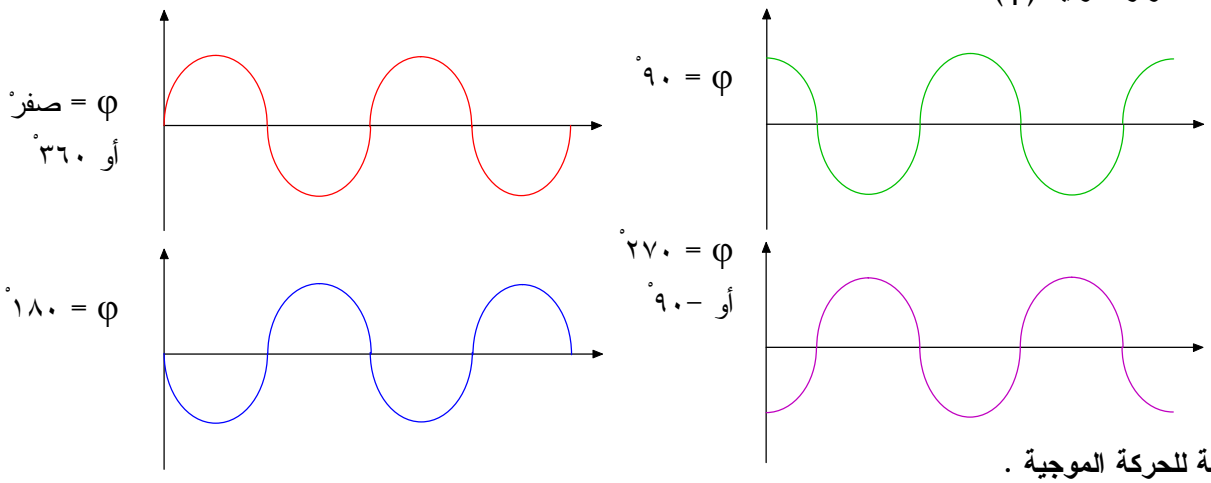
٢) السرعة تتقدم الإزاحة في الطور بمقدار ٩٠°.

٣) العجلة تتقدم الإزاحة في الطور بمقدار ١٨٠°.

٤) عندما تتعدم الإزاحة تتعدم العجلة في حين تبلغ السرعة أقصاها.

٥) عندما تبلغ الإزاحة أقصى قيمة لها ، تبلغ العجلة أقصى قيمة لها (لكن في الاتجاه السالب) أما السرعة فتؤول إلى الصفر .

حالات خاصة للأطوار الأولية (φ):



المعادلة العامة للحركة الموجية .

يمكن وضع معادلتين لوصف الحركة الموجية بصورة عامة:

$$ص = أ\ جا(\omega ز \pm \varphi)$$

$$ع = \omega أ\ جتا(\omega ز \pm \varphi)$$

حيث أن:

ص: إزاحة نقطة على الموجة

أ: سعة الموجة

ω: السرعة الزاوية

ز: الزمن المستغرق

φ: ثابت الطور الأولى

ع: سرعة حركة نقطة على الموجة

العلاقة تبين الفرق في الطور والفرق في المسير :

يمكن إيجاد الفرق في الطور بمعرفة الفرق في المسير باستخدام المعادلة:

$$\alpha = \frac{\pi ٢}{\lambda} \times س$$

حيث أن:

α: الفرق في الطور.

س: الفرق في المسير.

الموجات الموقوفة:

تعريفها: هي الموجة التي تحتوي على عقد بينها بطون وتنشأ من تراكب حركتين موجيتين إحداهما ساقطة والأخرى موجة منعكسة لهما نفس التردد والسعة والسرعة وتنتشران في اتجاهين متضادين.

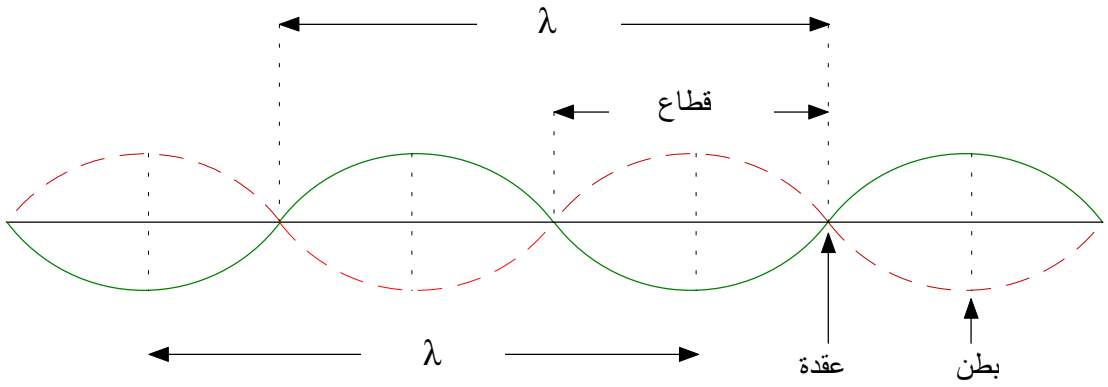
وهي تتكون من:

عقد: هي المواضع التي تنعدم عندها سعة الاهتزازة.

بطون: هي المواضع التي تبلغ فيها سعة الاهتزازة نهايتها العظمى.

قطاع: هي المنطقة المحصورة بين عقدتين متتاليتين.

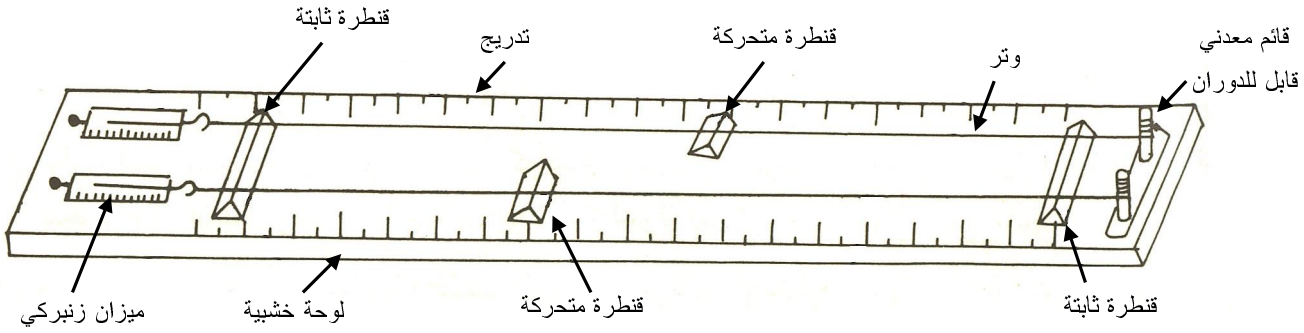
الطول الموجي للموجة الموقوفة: هو ضعف المسافة بين عقدتين أو بطنين متتالين.



الاهتزاز المستعرض للأوتار:

يستخدم جهاز الصونومتر لدراسة الاهتزاز المستعرض للأوتار.

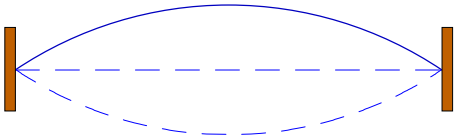
الصونومتر: يتكون من صندوق خشبي أجوف أو لوحة خشبية على شكل متوازي مستطيلات ويثبت على سطحه العلوي وبالقرب من نهايتيه قنطرتان خشبيتان تمر عليهما مجموعة من الأوتار، يتصل كل منها عند أحد طرفيه بميزان زنبركي ليقيس قوة شد الوتر، بينما يثبت الطرف الآخر بقائم معدني قابل للدوران لتغيير قوة الشد في الوتر. ولتغيير طول الجزء المهتز من الوتر توضع قنطرة خشبية ثالثة يمر فوقها الوتر وتتحرك بمحاذاة مسطرة مدرجة مثبتة على سطح الصونومتر لقياس طول الجزء المهتز من الوتر.



النغمات التوافقية الناتجة عن الاهتزاز المستعرض للأوتار:

عند طرق وتر الصونومتر من المنتصف نحصل على موجة موقوفة تتكون من قطاع واحد وتسمى النغمة الأساسية أو الرنين الأول.

النغمة الأساسية أو الرنين الأول (ن=١):



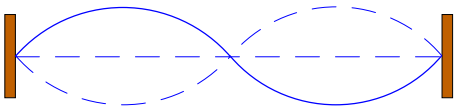
$\lambda_1 = 2ل$ $\quad$ $ل = \frac{\lambda}{2}$

وحيث ع = $\lambda \times$ ت

ع = ت$_1$ × ٢ل

$\therefore$ ت$_1$ = $\frac{ع}{2ل}$

عند لمس الوتر المهتز من الوسط نحصل على النغمة التوافقية الأولى أو الرنين الثاني (ن= ٢):



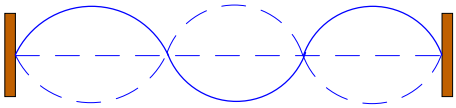
$ل = \lambda_2$ $\quad$ $ل = \lambda$

وحيث ع = $\lambda \times$ ت

ع = ل × ت$_2$

$\therefore$ ت$_2$ = $\frac{ع}{ل}$

وعند لمس الوتر المهتز عند ثلث طوله نحصل على النغمة التوافقية الثانية أو الرنين الثالث (ن=٣):



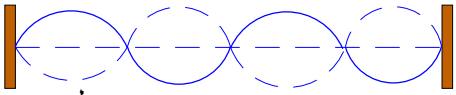
$\frac{2ل}{3} = \lambda_3$ $\quad$ $ل = \frac{3\lambda}{2}$

وحيث ع = $\lambda \times$ ت

ع = $\frac{2ل}{3}$ × ت$_3$

$\therefore$ ت$_3$ = $\frac{3ع}{2ل}$

وعند لمس الوتر المهتز عند ربع طوله نحصل على النغمة التوافقية الثالثة أو الرنين الرابع (ن=٤):



$\frac{ل}{2} = \lambda_4$ $\quad$ $ل = 2\lambda$

وحيث ع = $\lambda \times$ ت

ع = $\frac{ل}{2}$ × ت$_4$

$\therefore$ ت$_4$ = $\frac{2ع}{ل}$

وباعتبار أن سرعة الموجة ثابتة وباستخدام ترددات النغمات المختلفة:

ت$_1$: ت$_2$: ت$_3$: ت$_4$

$\frac{ع}{2ل}$: $\frac{ع}{ل}$: $\frac{3ع}{2ل}$: $\frac{2ع}{ل}$ $\quad$ وبالضرب × $\frac{2ل}{ع}$

نجد أن

ت$_1$: ت$_2$: ت$_3$: ت$_4$

١ : ٢ : ٣ : ٤

ويمكن استخدام القوانين التالية على اعتبار أن ن هو ترتيب الرنين:

$\lambda_ن = \frac{2ل}{ن}$

ت$_ن$ = $\frac{ن\ ع}{2ل}$ أو ت$_ن$ = ن ت$_1$ حيث ت$_1$: هو تردد النغمة الأساسية ويساوي $\frac{ع}{2ل}$ ل: طول الجزء المهتز من الوتر.

ملاحظة: ن تساوي عدد قطاعات الوتر المهتز.

العوامل التي يتوقف عليها تردد الوتر المهتز:

يتوقف تردد النغمة الصادرة عن الوتر على:

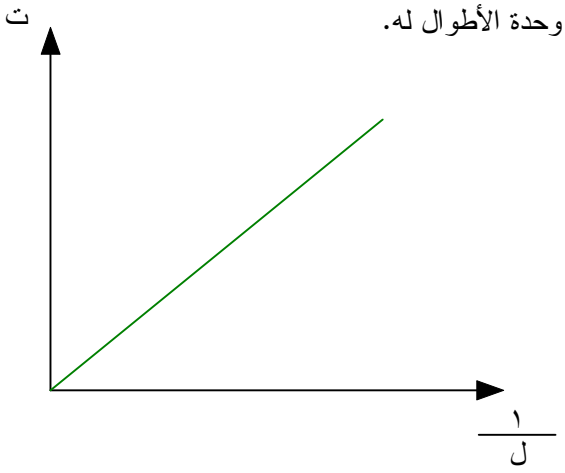
١) طول الجزء المهتز من الوتر (ل).

٢) قوة شد الوتر (ش).

٣) كتلة وحدة الأطوال من مادة الوتر (ك).

أولاً: العلاقة بين تردد المتر المهتز وطوله:

تردد الوتر المهتز يتناسب تناسباً عكسياً مع طوله عند ثبات الشد فيه وكتلة وحدة الأطوال له.



أي أن:

$$ت \propto \frac{١}{ل}$$

$$\frac{ت_١}{ت_٢} = \frac{ل_٢}{ل_١}$$

حيث أن:

ت١: تردد الوتر قبل تغيير طوله.

ت٢: تردد الوتر بعد تغيير طوله.

ل١: طول الوتر الأصلي.

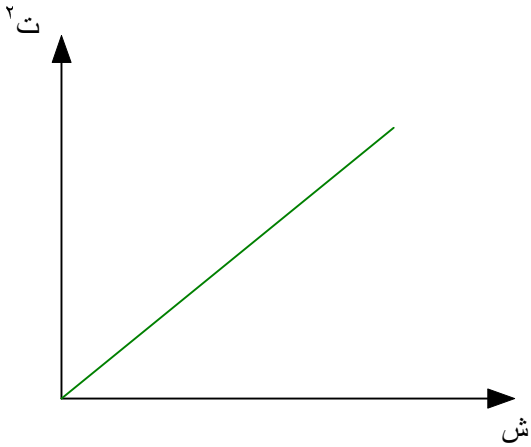
ل٢: طول الوتر بعد تغييره.

تكون المعادلتين السابقتين صحيحتين فقط عند ثبات قوة الشد في الوتر وكتلة وحدة الأطوال منه.

ثانياً: العلاقة بين تردد الوتر المهتز وقوة الشد:

تردد الوتر المهتز يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لقوة الشد في هذا الوتر عند ثبات طوله وكتلته وحدة الأطوال له.

أي أن:



$$ت \propto \sqrt{ش}$$

$$\sqrt{\frac{ش_١}{ش_٢}} = \frac{ت_١}{ت_٢}$$

حيث أن:

ت١: تردد الوتر قبل تغيير قوة الشد فيه.

ت٢: تردد الوتر بعد تغيير قوة الشد فيه.

ش١: قوة الشد في الوتر قبل تغييرها.

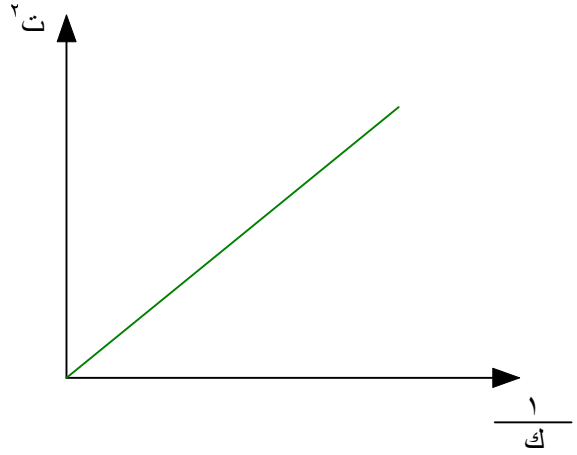
ش٢: قوة الشد في الوتر بعد تغييرها.

تكون المعادلتين السابقتين صحيحتين فقط عند ثبات طول الوتر وكتلة وحدة الأطوال منه.

ثالثاً: العلاقة بين تردد الوتر وكتلته وحدة الأطوال منه:

تردد الوتر يتناسب تناسباً عكسياً مع الجذر التربيعي لكتلة وحدة الأطوال منه (سمك الوتر) عند ثبات طول الوتر وقوة الشد فيه.

أي أن:



$$ت \propto \frac{١}{\sqrt{ك}}$$

$$\frac{ت_{١}}{ت_{٢}} = \sqrt{\frac{ك_{٢}}{ك_{١}}}$$

حيث أن:

ت١: تردد الوتر قبل تغيير كتلة وحدة الأطوال منه.

ت٢: تردد الوتر بعد تغيير كتلة وحدة الأطوال منه.

ك١: كتلة وحدة الأطوال قبل تغييرها.

ك٢: كتلة وحدة الأطوال بعد تغييرها.

تكون المعادلتين السابقتين صحيحتين فقط عند ثبات طول الوتر وقوة الشد فيه.

قانون الاهتزاز المستعرض للأوتار:

$$\because \quad ت \propto \frac{١}{ل} \quad و \quad ت \propto \sqrt{ش} \quad و \quad ت \propto \frac{١}{\sqrt{ك}}$$

$$\therefore \quad ت \propto \frac{١}{ل}\sqrt{\frac{ش}{ك}}$$

$$\therefore \quad ت = \text{ثابت} \times \frac{١}{ل}\sqrt{\frac{ش}{ك}}$$

وقد وجد عملياً أن هذا الثابت يساوي $\frac{١}{٢}$

$$\therefore \quad ت = \frac{١}{٢ل}\sqrt{\frac{ش}{ك}}$$ وهو تردد النغمة الأساسية (ت١)

$$\because \quad ت_{ن} = ن\, ت_{١}$$

$$\therefore \quad ت_{ن} = \frac{ن}{٢ل}\sqrt{\frac{ش}{ك}}$$

استنتاج آخر:

$$\because \quad ع = \sqrt{\frac{ش}{ك}}$$ ارجع للفصل الأول من الكتاب

$$و \quad ع = \lambda \times ت$$

$$\therefore \quad \lambda \times ت = \sqrt{\frac{ش}{ك}}$$

$$\because \quad \lambda_{ن} = \frac{٢ل}{ن}$$

$$\therefore \text{ت}_{\text{ن}} \times \frac{\text{ل}^{2}}{\text{ن}} = \sqrt{\frac{\text{ش}}{\text{ك}}}$$

$$\therefore \quad \text{ت}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{ل}^{2}} \sqrt{\frac{\text{ش}}{\text{ك}}}$$

اهتزاز الأعمدة الهوائية:

ينقسم اهتزاز الأجسام إلى:

١) **الاهتزاز الحر:** إذا اهتز جسم ما بتردده الطبيعي.

٢) **الاهتزاز التأثري:** وهو يحدث عندما يهتز جسم بتأثير جسم آخر مهتز. وينقسم بدوره إلى:

أ. **الاهتزاز القسري:** إذا اهتز الجسم بتأثير جسم آخر مهتز يختلف عنه في التردد الطبيعي. يتوقف الجسم المتأثر عن الاهتزاز فور ابتعاد الجسم المهتز عنه.

ب. **الاهتزاز الرنيني:** هو الاهتزاز الذي يتم بين جسمين لهما نفس التردد الطبيعي أحدهما مهتز والآخر يهتز بتأثير الجسم الأول دون أن يتلامسا. ويستمر الجسم المتأثر في الاهتزاز حتى مع ابتعاد الجسم المهتز عنه.

الرنين في الأعمدة الهوائية:

عند تقريب شوكة رنانة تهتز من فوهة عمود هوائي فإنه عند طول معين للعمود يسمع رنين أي تقوية للصوت، حيث يتساوى تردد الشوكة الرنانة مع التردد الطبيعي للعمود الهوائي، ويمكن تغيير طول العمود الهوائي بوضع كمية من الماء فيه. وقد وجد بالتجربة أنه كلما زاد تردد الشوكة المستخدمة قل طول العمود الهوائي الذي يحدث معها الرنين والعكس.

$$\text{ت} \propto \frac{١}{\text{ل}}$$

$$\frac{\text{ت}_{١}}{\text{ت}_{٢}} = \frac{\text{ل}_{٢}}{\text{ل}_{١}}$$

حيث أن:

ت١: تردد الشوكة الرنانة.

ت٢: تردد شوكة رنانة أخرى.

ل١: طول العمود الهوائي الذي حدث له رنين مع الشوكة الرنانة الأولى.

ل٢: طول العمود الهوائي الذي حدث له رنين مع الشوكة الرنانة الثانية.

وتنقسم الأعمدة الهوائية إلى:

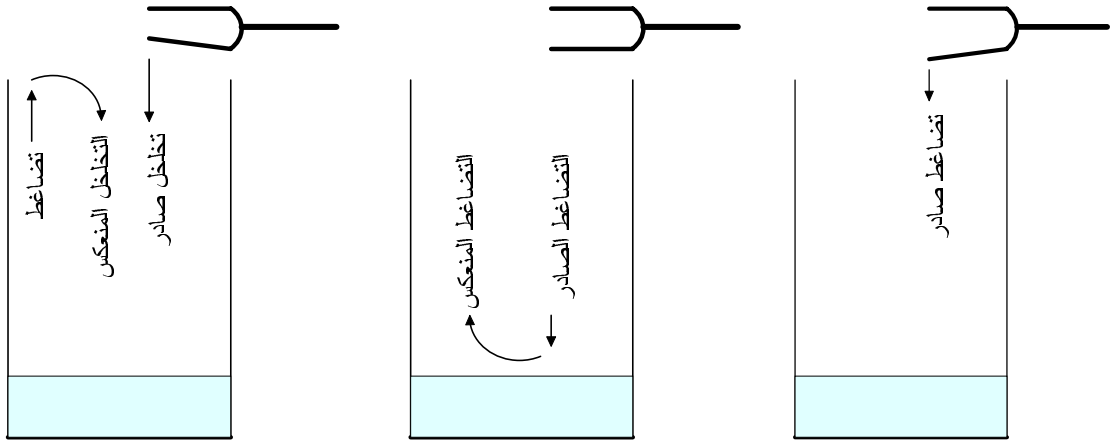
١) أعمدة هوائية مغلقة: وهي عبارة عن أنبوبة مغلقة من جهة واحدة.

٢) أعمدة هوائية مفتوحة: وهي عبارة عن أنبوبة مفتوحة من الجهتين.

تفسير حدوث الرنين في الأعمدة الهوائية:

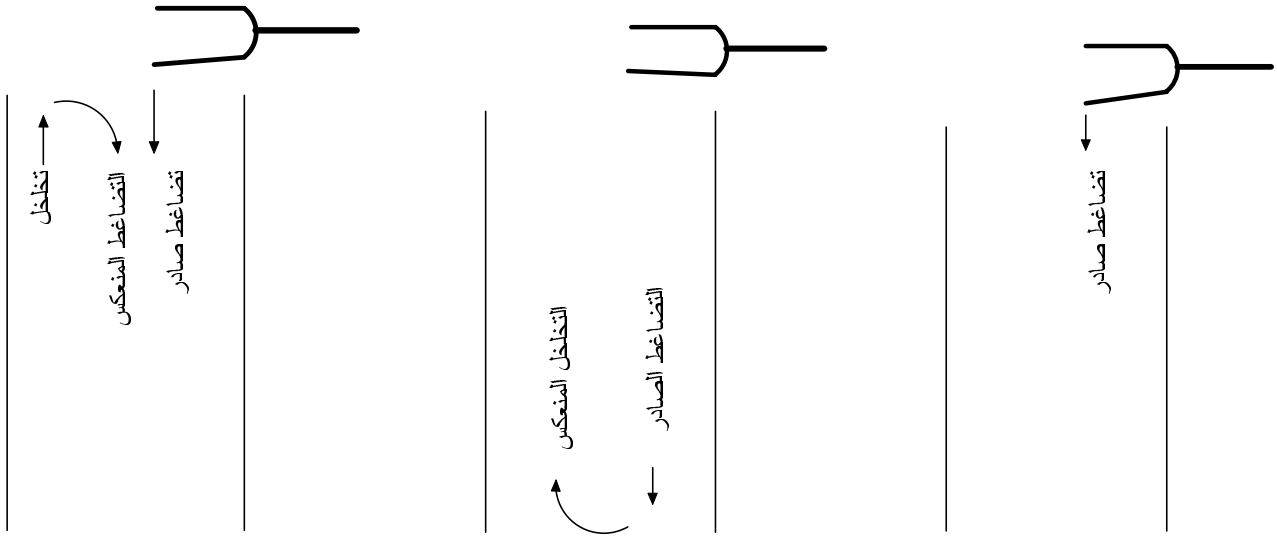
أولاً: الرنين في الأعمدة الهوائية المغلقة:

عندما يتحرك فرع الشوكة للأسفل تحدث نبضة تضاغط تسري في هواء الأنبوبة حتى تقابل سطح الماء فتنعكس على شكل تضاغط أيضاً. وتسري هذه النبضة في هواء الأنبوبة إلى أعلى حتى تصل إلى فوهتها حيث تنعكس على شكل تخلخل، فإذا كان طول العمود الهوائي مناسباً بحيث يتقابل التخلخل الناشئ عن الانعكاس مع التخلخل الناشئ عن فرع الشوكة الرنانة عند تحركه للأعلى تحدث تقوية للصوت ويحدث الرنين حيث تنشأ موجة موقوفة في العمود الهوائي.



ثانياً: الرنين في الأعمدة الهوائية المفتوحة:

عندما يتحرك فرع الشوكة للأسفل تحدث نبضة تضاغط تسري في هواء الأنبوبة حتى إلى الطرف المفتوح الآخر فتنعكس على شكل نبضة تخلخل تسري في العمود إلى أعلى حتى تصل إلى فوهته القريبة من فرع الشوكة الرنانة، فينعكس عنها التخلخل على شكل تضاغط، فإذا كان طول العمود الهوائي مناسباً بحيث يتقابل هذا التضاغط مع التضاغط الناشئ عن فرع الشوكة الرنانة عند تحركه للأسفل تحدث تقوية للصوت ويحدث الرنين حيث تنشأ موجة موقوفة في العمود الهوائي.



ملاحظات:

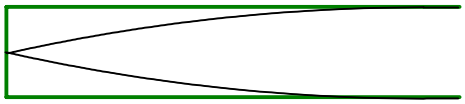
١. عندما تنعكس موجة الصوت عن الطرف المغلق تنعكس معتدلة أي أن التضاغط ينعكس تضاغط والتخلخل ينعكس تخلخل. وعندما تنعكس موجة الصوت عن الطرف المفتوح تنعكس مقلوبة أي أن التضاغط ينعكس تخلخل والتخلخل ينعكس تضاغط.

٢. يتكون عند الطرف المغلق عقدة وعند الطرف المفتوح بطن في حالة الرنين في الأعمدة الهوائية.

النغمات التوافقية في الأعمدة الهوائية:

أولاً: في حالة الأعمدة الهوائية المغلقة:

النغمة الأساسية أو الرنين الأول (ن=١):



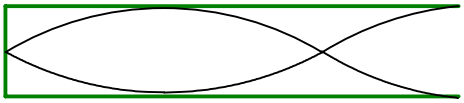
$\lambda_1 = 4ل$ $\quad$ $ل = \frac{\lambda}{4}$

وحيث ع = $\lambda \times$ ت

ع = ت$_1 \times 4ل$

$\therefore$ ت$_1 = \frac{ع}{4ل}$

النغمة التوافقية الأولى أو الرنين الثاني (ن= ٢):



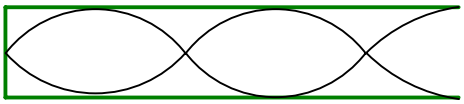
$\lambda_2 = \frac{4ل}{3}$ $\quad$ $ل = \frac{3\lambda}{4}$

وحيث ع = $\lambda \times$ ت

ع = $\frac{4ل}{3} \times$ ت$_2$

$\therefore$ ت$_2 = \frac{3ع}{4ل}$

النغمة التوافقية الثانية أو الرنين الثالث (ن=٣):



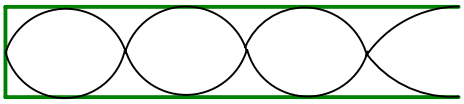
$\lambda_3 = \frac{4ل}{5}$ $\quad$ $ل = \frac{5\lambda}{4}$

وحيث ع = $\lambda \times$ت

ع = $\frac{4ل}{5} \times$ ت$_3$

$\therefore$ ت$_3 = \frac{5ع}{4ل}$

النغمة التوافقية الثالثة أو الرنين الرابع (ن=٤):



$\lambda_4 = \frac{4ل}{7}$ $\quad$ $ل = \frac{7\lambda}{4}$

وحيث ع = $\lambda \times$ ت

ع = $\frac{4ل}{7} \times$ ت$_4$

$\therefore$ ت$_4 = \frac{7ع}{4ل}$

وباعتبار أن سرعة الموجة ثابتة وباستخدام ترددات النغمات المختلفة:

ت$_1$: ت$_2$: ت$_3$: ت$_4$

$\frac{ع}{4ل}$: $\frac{3ع}{4ل}$: $\frac{5ع}{4ل}$: $\frac{7ع}{4ل}$ $\quad$ وبالضرب $\times$ $\frac{4ل}{ع}$

نجد أن

ت$_1$: ت$_2$: ت$_3$: ت$_4$

١ : ٣ : ٥ : ٧

ويمكن استخدام القوانين التالية على اعتبار أن ن هو ترتيب الرنين:

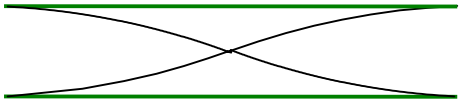
$\lambda_ن = \frac{4ل}{2ن-1}$

ت$_ن = \frac{(2ن-1)\ ع}{4ل}$ أو ت$_ن$ = (٢ن−١) ت$_1$ حيث ت$_1$: هو تردد النغمة الأساسية ويساوي $\frac{ع}{4ل}$ ل: طول العمود الهوائي.

ملاحظة: ن يساوي عدد العقد في الموجة الموقوفة المتكونة في العمود الهوائي.

ثانياً: في حالة الأعمدة الهوائية المفتوحة:

النغمة الأساسية أو الرنين الأول (ن=١):



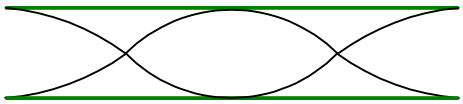
$$\text{ل} = \frac{\lambda}{٢} \qquad \lambda_{١} = ٢\text{ل}$$

وحيث ع = λ× ت

ع = ت$_{١}$× ٢ل

$$\therefore \quad \text{ت}_{١} = \frac{\text{ع}}{٢\text{ل}}$$

النغمة التوافقية الأولى أو الرنين الثاني (ن= ٢):



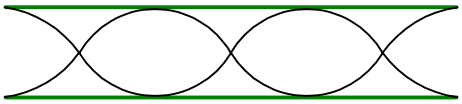
$$\lambda = \text{ل} \qquad \lambda_{٢} = \text{ل}$$

وحيث ع = λ× ت

ع = ل × ت$_{٢}$

$$\therefore \quad \text{ت}_{٢} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}}$$

النغمة التوافقية الثانية أو الرنين الثالث (ن=٣):



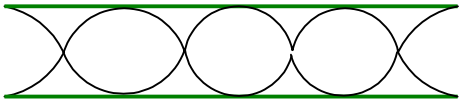
$$\text{ل} = \frac{٣\lambda}{٢} \qquad \frac{٢\text{ل}}{٣} = \lambda_{٣}$$

وحيث ع = λ ×ت

$$\text{ع} = \frac{٢\text{ل}}{٣} \times \text{ت}_{٣}$$

$$\therefore \quad \text{ت}_{٣} = \frac{٣\text{ع}}{٢\text{ل}}$$

النغمة التوافقية الثالثة أو الرنين الرابع (ن=٤):



$$\text{ل} = ٢\lambda \qquad \frac{\text{ل}}{٢} = \lambda_{٤}$$

وحيث ع = λ × ت

$$\text{ع} = \frac{\text{ل}}{٢} \times \text{ت}_{٤}$$

$$\therefore \quad \text{ت}_{٤} = \frac{٢\text{ع}}{\text{ل}}$$

وباعتبار أن سرعة الصوت ثابتة وباستخدام ترددات النغمات المختلفة:

ت$_{١}$: ت$_{٢}$: ت$_{٣}$: ت$_{٤}$

$$\frac{\text{ع}}{٢\text{ل}} \quad : \quad \frac{\text{ع}}{\text{ل}} \quad : \quad \frac{٣\text{ع}}{٢\text{ل}} \quad : \quad \frac{٢\text{ع}}{\text{ل}} \qquad \text{وبالضرب} \times \frac{٢\text{ل}}{\text{ع}}$$

نجد أن

ت$_{١}$: ت$_{٢}$: ت$_{٣}$: ت$_{٤}$

١ : ٢ : ٣ : ٤

ويمكن استخدام القوانين التالية على اعتبار أن ن هو ترتيب الرنين:

$$\lambda_{\text{ن}} = \frac{٢\text{ل}}{\text{ن}}$$

$$\text{ت}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن ع}}{٢\text{ل}} \quad \text{أو} \quad \text{ت}_{\text{ن}} = \text{ن ت}_{١}$$

حيث ت$_{١}$: هو تردد النغمة الأساسية ويساوي $\frac{\text{ع}}{٢\text{ل}}$ ل: طول العمود الهوائي.

ملاحظة: ن يساوي عدد العقد في الموجة الموقوفة المتكونة في العمود الهوائي.