

# MODELLAZIONE ED ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI DI CAPRIATE LIGNEE ALLA LOMBARDA

*Claudio Carino*

*Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura dell'Università di Pavia - Via Ferrata, 3 – 27100 PAVIA*

## 1. INTRODUZIONE

Storicamente, il legno è stato sin dalle epoche più antiche il materiale da costruzione per eccellenza; il suo impiego è rimasto predominante fino alla fine dell'Ottocento: se ben mantenuto e correttamente lavorato ed utilizzato, risponde bene alla sfida del tempo, come dimostrano le tante strutture rimaste a testimonianza dei secoli passati.

Nonostante, a partire dal periodo romanico, l'architettura monumentale preferisse le coperture a volta, la tipologia con capriate lignee a falde si diffuse ugualmente in tutta l'Europa medievale, dando vita a numerose varianti. In Italia, in particolare, perdurò l'uso della capriata anche per grandi chiese monumentali, oltre che per edifici minori, mentre nell'Europa continentale sono presenti capriate complesse con diversi gradi di iperstaticità. Nelle capriate a falde il corrente superiore veniva adattato alla forma della copertura, ed il profilo del corrente inferiore era determinato dalle esigenze di altezza libera, dalla soffittatura e dai requisiti di altezza della costruzione. L'abete rosso, il pino, il larice ed il castagno hanno rappresentato per secoli le specie arboree più utilizzate ai fini strutturali dell'arboricoltura italiana.

Nel Rinascimento la capriata fu esaminata nel suo funzionamento da vari trattatisti, tra cui Leonardo da Vinci. In generale tali studi rivelano come ancora non fosse maturata la conoscenza della natura "reticolare" della capriata. Andrea Palladio fu tra i primi architetti a disegnare la capriata con monaco e saettoni, ben collegati con la catena, in una struttura razionale ed ordinata, interamente reticolare, per quanto non ancora pienamente compresa. Nel XVIII e soprattutto nel XIX secolo la capriata fu studiata sul piano teorico, giungendo alla piena comprensione del funzionamento statico, il cui principio diede vita a strutture ben più complesse come le travature reticolari vere e proprie.

L'uso della capriata si è mantenuto anche nel XIX secolo e nel Novecento, soprattutto nell'edilizia industriale, affiancando al tradizionale materiale ligneo anche i materiali metallici, molto più resistenti a trazione, per la realizzazione della catena. Viste inoltre le premesse, considerata la diffusione di questo tipo di sistema strutturale, appare comprensibile l'enorme varietà di tipologie e di soluzioni che ne sono derivate. Nel corso di questi secoli la capriata è stata codificata nell'immagine manualistica che si impose ai fini del calcolo statico, senza tuttavia riuscire, almeno fino alla seconda metà del XX secolo, nell'intento di ridurre la laboriosità.

In questo lavoro si vuole porre l'attenzione, alla luce dell'utilizzo di un codice di calcolo agli elementi finiti, sullo studio di coperture esistenti, basate su classici schemi di capriata alla lombarda, diffuse principalmente nell'Italia settentrionale fino alla prima metà del Novecento. Vengono presi in considerazione sistemi strutturali ad ampia luce ed elevato interesse, ai fini di analizzare, mediante calcolo automatico, lo stato di sollecitazione e di sforzo presente all'interno dei singoli elementi. Particolare attenzione è rivolta alla discretizzazione ed all'analisi della catena, elemento cruciale per il corretto funzionamento dell'intera struttura.

## 2. LA CAPRIATA ALLA LOMBARDA

Fra le strutture lignee esistenti, le capriate reticolari costituiscono un tipo di costruzione diffuso che sfrutta pienamente i vantaggi potenziali del legno ed i benefici delle connessioni meccaniche. Si tratta di una travatura reticolare piana posta in verticale ed usata come elemento base di una copertura a falde inclinate. È in grado di annullare quasi completamente le spinte orizzontali grazie alla sua struttura internamente rigida, nella quale l'elemento orizzontale (catena) annulla le spinte degli elementi inclinati principali (punti): viene dunque tipicamente classificata tra le strutture architettoniche non spingenti.

La capriata alla lombarda (v. Fig.1, ripresa successivamente per il caso esaminato) è costituita in particolare da: due puntoni, travi inclinate che determinano la pendenza del tetto; la catena, elemento orizzontale che costituisce la base del triangolo rigido e che supporta sforzi di trazione che altrimenti andrebbero a gravare, sotto forma di forza orizzontale, sul punto di connessione dei puntoni con la muratura; il monaco, elemento verticale che collega tutti gli elementi, ad eccezione della catena, pur essendo in parte ad essa vincolato tramite un ferro ad U (staffa); le saette o contraffissi, elementi con inclinazione opposta a quella dei puntoni che limitano la lunghezza di libera inflessione dei puntoni stessi, trasferendo sul monaco la forza di compressione a cui sono sottoposte.

Il sistema così costituito è soggetto a sollecitazioni di trazione (il monaco ma soprattutto la catena), compressione (le saette) e pressoflessione (i puntoni). In realtà la catena, considerando il suo rilevante peso proprio, risulta sottoposta a tensoflessione; il monaco risulta invece debolmente teso e, nell'intento degli architetti dell'epoca rinascimentale e secondo quanto appare dalla manualistica ottocentesca, aveva sostanzialmente il compito, oltre a quello di limitare la flessione della catena, di assicurare il collegamento tra i puntoni e la complanarità della struttura

Quando la capriata svolge la funzione di struttura portante di una copertura alla lombarda, su di essa vengono appoggiate delle travi ad essa perpendicolari (v. Fig.2). La trave di colmo è posizionata in sommità, mentre quelle che appoggiano direttamente sui puntoni sono denominate arcarecci (o terzere quando suddividono la falda in tre parti). Sulla trave di colmo e sugli arcarecci sono poi appoggiate ulteriori travi perpendicolari, dette travicelli, che scorrono obliquamente e parallelamente ai puntoni. Sui questi ultimi poggiano i cosiddetti correntini, che a loro volta sostengono un tavolato ed il manto di copertura vero e proprio, realizzato in coppi, tegole curve, embrici o in tegole stampate.

## 2.1 Situazioni di degrado

Non di rado gli elementi costituenti la capriata sono soggetti a fenomeni di degrado dovuti in generale all'invecchiamento dei materiali e/o alla prolungata mancanza di manutenzione: ad esempio, in edifici abbandonati da lungo tempo possono risultare evidenti lesioni, sconnessioni o perdita di continuità nelle fibre del legno. Intervengono inoltre più specifiche cause di deterioramento: fra queste, talvolta meno apparenti, agenti biologici, dovuti alla natura organica del materiale, ed ambientali, dovuti alle intemperie. Il degrado biologico è rappresentato principalmente dalle carie del legno o dall'attacco di insetti xilofagi e le conseguenze che si possono avere sono in relazione alla diffusione più o meno ampia ed alla posizione all'interno della struttura.

Tutto ciò può portare col tempo ad una alterazione delle proprietà meccaniche del materiale, con conseguente riduzione dell'efficienza statica dei singoli elementi costituenti la struttura. In tal senso, un'accurata ispezione visiva e specifiche analisi strumentali secondo tecniche diagnostiche non distruttive (fra queste, le prove resistografiche, ultrasoniche ed endoscopiche [1]) sono in grado di quantificare le eventuali alterazioni subite nel corso del tempo, e di stimarne l'effetto. Non si dimentichi inoltre, in aggiunta alle situazioni legate al degrado, che le sempre più stringenti normative nell'ambito della sicurezza strutturale tendono ad acuire ulteriormente queste problematiche.

Un'attenta valutazione dello stato di sforzo all'interno di ogni singolo componente si rende dunque necessaria per stabilire, anche in assenza di evidenti segni di degrado, quale potrebbe essere, allo stato attuale, un margine ritenuto accettabile in termini di affidabilità dell'intero sistema strutturale. In particolare, è la catena a dover essere esaminata in maggior dettaglio, in quanto elemento cruciale del sistema, destinato ad assorbire quasi completamente le sollecitazioni assiali di trazione (quasi sempre le più onerose, con riferimento alle caratteristiche di resistenza del legno). Su tale elemento peculiare della capriata, infatti, viene nel presente lavoro effettuata una opportuna discretizzazione agli elementi finiti solidi, in grado di acquisire, a seguito di opportuna validazione, una più accurata precisione nei risultati.

## 3. LA CAPRIATA ANALIZZATA

Viene analizzata in questo lavoro una capriata alla lombarda preesistente, realizzata in abete rosso ed utilizzata per una classica copertura a falde di inizio secolo scorso. In Fig.1 è riportato lo schema geometrico della capriata presa in esame: si tratta di un sistema strutturale ad ampia luce (12 m), che si ripete ad elevato

interasse, pari alla luce stessa, a sostegno della copertura. Il sistema è inoltre molto ribassato (di altezza pari a 2 m), dando quindi luogo ad elevate sollecitazioni sia nei puntoni che nella catena.

L'orditura secondaria è costituita in primo luogo da arcarecci, che poggiano sui puntoni delle capriate, ortogonalmente ad esse, in numero di 5. Su di essi, secondo i vari ordini, sono disposti a griglia i travicelli, paralleli ai puntoni e, successivamente, i correntini. Questi ultimi sostengono a loro volta un tavolato ed il manto di copertura vero e proprio, realizzato con dei coppi. Lo schema relativo all'orditura secondaria è rappresentato in Fig.2, mentre le proprietà delle sezioni lignee dei vari elementi sono qui di seguito riportate:

- Lato sezione quadrata della catena e dei puntoni (m) 0,4
- Lato sezione quadrata del monaco e delle saette (m) 0,3
- Lato sezione quadrata degli arcarecci e della trave di colmo (m) 0,3
- Lato sezione quadrata dei travicelli (m) 0,25
- Lato sezione quadrata dei correntini (m) 0,15

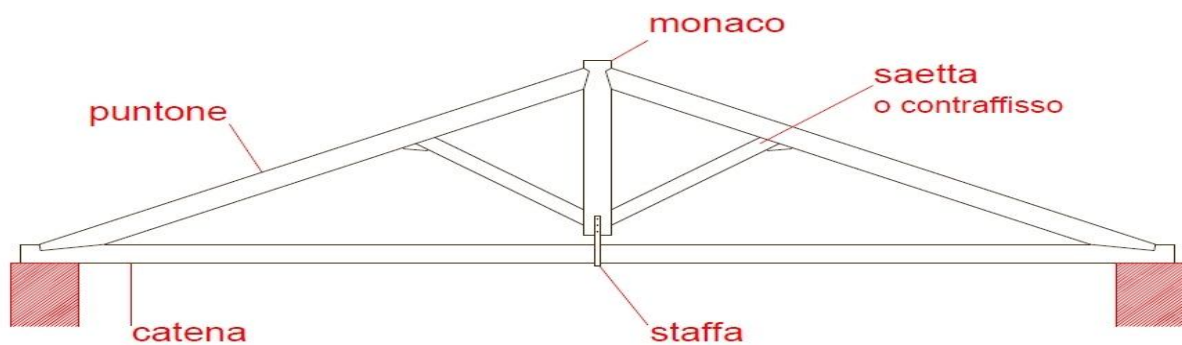


Fig. 1 - Geometria della capriata lignea analizzata

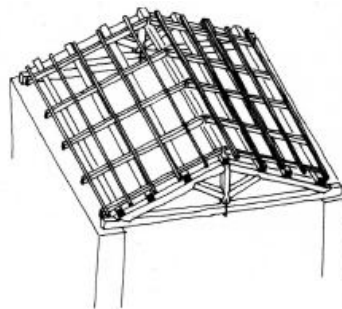


Fig. 2 - Schema dell'orditura secondaria

La struttura è situata in provincia di Pavia ad un'altitudine minore di 200 m. Per il materiale in abete rosso vengono ipotizzate le seguenti proprietà:

- Resistenza a trazione parallela alla fibratura (MPa) : 17
- Resistenza a compressione parallela alla fibratura (MPa) : 23
- Modulo elastico medio parallelo alle fibre (GPa) : 11,71 [2]

- Modulo elastico medio perpendicolare alle fibre (GPa) : 4,94 [2]
- Densità media (Kg/m<sup>3</sup>) : 450

L'analisi dei carichi viene eseguita sulla travatura nella situazione attuale, tenendo conto di tutti i pesi propri, sia di quelli strutturali che dei carichi relativi al manto di copertura, nonché del carico da neve, valutato secondo normativa in relazione alla zona di ubicazione. I carichi provenienti dalla copertura e fino agli arcarecci compresi vengono tradotti in carichi concentrati agenti sui puntoni, che vanno a sommarsi a tutti i pesi propri restanti.

### 3.1 Modellazione della struttura

Ai fini della successiva analisi strutturale, i vincoli di appoggio della capriata alla muratura portante vengono assunti a cerniera da un lato ed a carrello dall'altro, consentendo così alla catena di deformarsi liberamente a trazione. La distanza dell'estremità inferiore del monaco dalla catena è ipotizzata, in condizioni di struttura indeformata, pari a 0,20 m, mentre il suo peso proprio viene rappresentato, a differenza di quelli relativi agli altri elementi portanti, caratterizzati da carichi distribuiti, mediante un unico carico concentrato applicato nel baricentro. Gli schemi utilizzati per la modellazione della struttura e la successiva analisi ad elementi finiti sono riportati in Fig.3a e 3b, in cui sono distinte le applicazioni dei carichi puntuali da quelli distribuiti. In particolare, i carichi puntuali provenienti dagli arcarecci sono di 62,8 KN, quelli derivanti dalla trave di colmo e dal monaco sono rispettivamente di 4,8 e 0,73 KN, mentre i carichi distribuiti dovuti ai pesi propri dei puntoni (uguali a quelli derivanti dalla catena) e delle saette sono rispettivamente di 0,72 e 0,40 KN/m. Ogni collegamento tra singoli elementi portanti è modellato tramite cerniera.

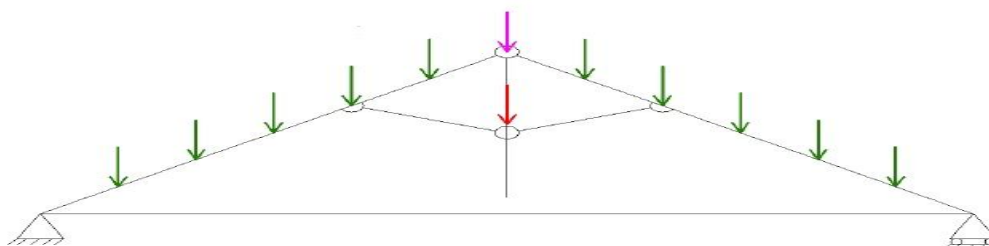


Fig. 3a – I carichi puntuali agenti sulla struttura

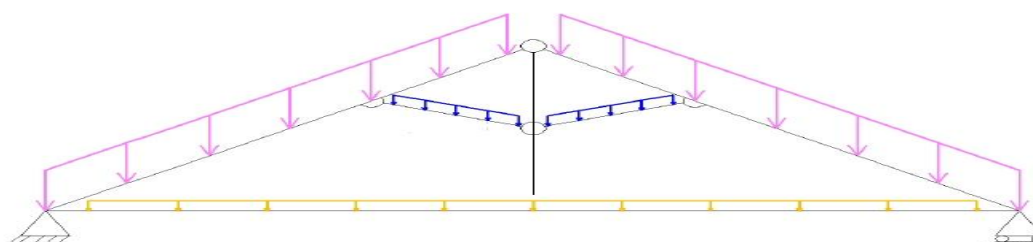


Fig. 3b – I carichi distribuiti agenti sulla struttura

## 4. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

Vengono condotti due tipi di analisi agli elementi finiti sull'intera struttura. Una prima analisi esamina l'insieme come composto da soli elementi *Frame* a 2 nodi, cioè elementi semplicemente lineari e coincidenti

con l'asse di ogni elemento. Una seconda analisi prevede invece una discretizzazione della sola catena in elementi solidi di tipo *Brick* a 8 nodi: ciò predispone, oltre ad una validazione dei risultati ottenuti dalla prima analisi, alla prospettiva di analizzare, in futuri studi, la presenza di eventuali rinforzi [3][4][5] applicabili alla catena; infatti, soltanto con una discretizzazione che tenga conto dell'effettiva sezione della catena, è possibile procedere con una descrizione geometrica ed una successiva analisi anche di un'eventuale porzione di rinforzo.

#### 4.1 Analisi con soli elementi *Frame*

In questa prima analisi gli elementi vengono definiti attraverso l'introduzione, al di là dei nodi di estremità degli elementi strutturali costituenti la capriata, anche dei nodi corrispondenti alla posizione dei carichi puntuali di Fig.3a. Viene inoltre introdotto un nodo centrale in catena, in modo tale da poter leggere lo spostamento dovuto a tensoflessione. In Fig.4 è riportata la numerazione dei nodi, la simbologia dei vincoli assunti ed il riferimento globale adottato nel piano. Rispetto agli schemi di massima delle Figg.3a e 3b, è stata operata una correzione della posizione del nodo di collegamento monaco/saette, che denoti l'effettiva geometria della struttura esaminata.

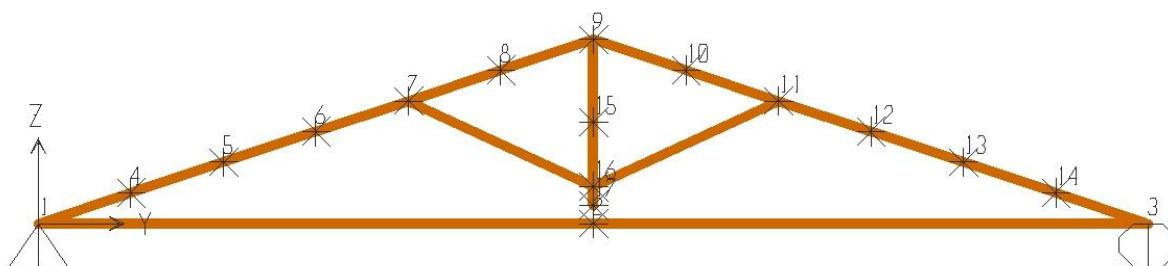


Fig. 4 – Discretizzazione della struttura in soli elementi *Frame*

Coi carichi descritti negli schemi di Figg.3a e 3b e con le proprietà geometriche e meccaniche descritte al Par. 3, viene condotta l'analisi mediante uno dei più diffusi software agli elementi finiti. In Fig.5 è riportata la configurazione deformata sotto l'effetto dei carichi: in realtà, a differenza di quanto appare approssimativamente dalla rappresentazione grafica, l'esame dei valori numerici relativi agli spostamenti mostra come l'estremità inferiore del monaco, una volta applicati i carichi, non raggiunga la mezzeria della catena, che rimane sollecitata a tensoflessione per il solo effetto del peso proprio.

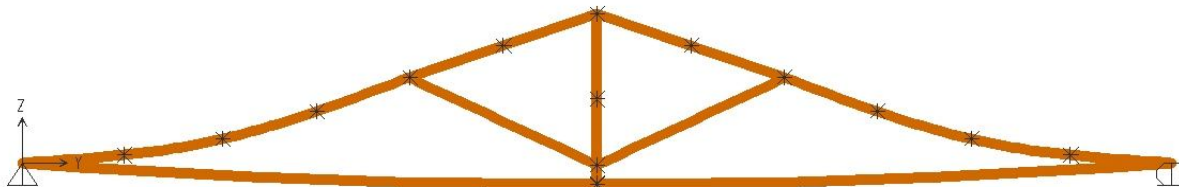


Fig. 5 – Configurazione deformata in soli elementi *Frame*

Le Figg.6a e 6b mostrano gli andamenti delle sollecitazioni di interesse per il problema analizzato, cioè le azioni assiali ed i momenti flettenti. L'esame dei risultati numerici, in particolare, mostra per la catena

un'azione assiale costante di trazione pari a 712 kN ed un momento flettente massimo, quasi impercettibile nella rappresentazione grafica, di soli 13 kNm: il che dà luogo ad una tensione normale massima di 5,66 MPa in direzione Y. Per quanto riguarda gli altri elementi più sollecitati, cioè i puntoni, l'azione assiale massima risultante è pari a 777 kN, mentre il momento massimo con fibre inferiori tese è di 105 kNm, dando luogo in sintesi ad una tensione normale massima nella direzione dell'asse dei puntoni leggermente inferiore a quella della catena, pari a circa 5 MPa. Lo stato sollecitativo del monaco e delle saette appare invece molto ridotto e visibile soltanto da un controllo numerico: in particolare, il monaco risulta solo debolmente teso, mentre le saette, soggette ad una limitata compressione, risultano solo leggermente inflesse, dando quindi luogo entrambi, nonostante la loro sezione più ridotta, a tensioni praticamente ininfluenti ai fini di una verifica.

Il modello agli elementi finiti basato su soli elementi *Frame* costituisce una base di partenza per un successivo confronto con un modello più dettagliato, che introduca, come mostrato nel paragrafo riportato di seguito, una discretizzazione della catena mediante elementi finiti solidi di tipo *Brick*: questo, al fine di evidenziare in modo più preciso la variabilità delle tensioni all'interno della sua sezione e consentire, al tempo stesso, possibili implementazioni del modello nella direzione di un eventuale intervento di rinforzo.

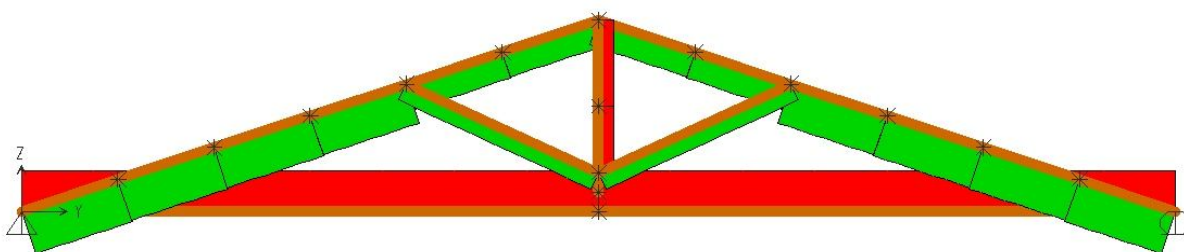


Fig. 6a – Sollecitazioni assiali in soli elementi *Frame*

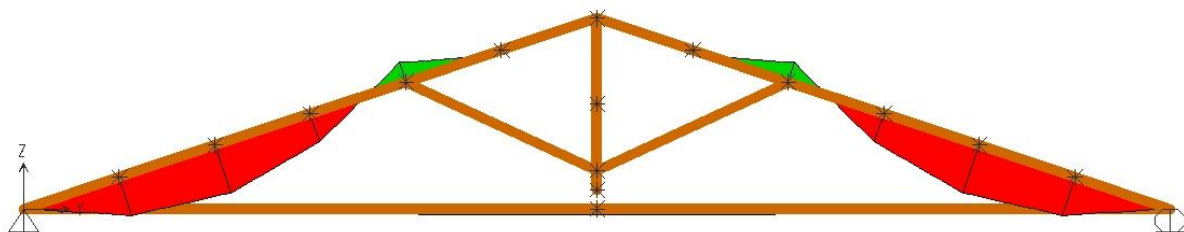


Fig. 6b – Sollecitazioni flettenti in soli elementi *Frame*

#### 4.2 Analisi con elementi *Frame* e *Brick*

Nel corso di questa seconda analisi vengono mantenuti gli elementi *Frame* su tutti i componenti della capriata ad eccezione della catena, che viene discretizzata in elementi solidi di tipo *Brick* a 8 nodi. Il numero elevato di elementi *Brick* rappresenta una scelta voluta, in vista dell'opportunità di cogliere pur minime variazioni di sforzo all'interno delle varie zone dell'elemento. La discretizzazione della struttura è riportata in Fig.7a nella configurazione deformata derivante dall'analisi, insieme ai vincoli di carrello e cerniera schematizzati in estremità.

La connessione tra gli elementi *Frame* costituenti i puntoni e gli elementi *Brick* utilizzati per la catena è stata modellata introducendo un ulteriore elemento di tipo *Frame*, disposto 'a piolo' perpendicolarmente al

piano della capriata e collegato a cerniera col puntone; tale elemento fittizio viene poi collegato in modo solidale ai due elementi centrali della mesh utilizzata per la catena (v. Fig. 7b).

In relazione a quanto riportato in [2] e, contestualmente, alla manualistica del software ad elementi finiti adottato, sono stati inoltre introdotti, in fase di input per gli elementi solidi, 3 coefficienti di Poisson che tengono conto della ortotropia del materiale. Essi possono essere descritti, per il legname di conifera della capriata esaminata, dal vettore  $\{0,041, 0,033, 0,35\}$ . Viene inoltre fatto riferimento ad un ulteriore modulo elastico, in direzione radiale, pari a 0,83 GPa, secondo le indicazioni riportate nel testo [2] stesso, dando così luogo al vettore  $\{11,71, 0,83, 4,94\}$  dei moduli di Young, ove i rispettivi elementi del vettore sono rappresentati nell'ordine prescritto dal software agli elementi finiti, ai fini dell'assemblaggio della matrice di rigidità.

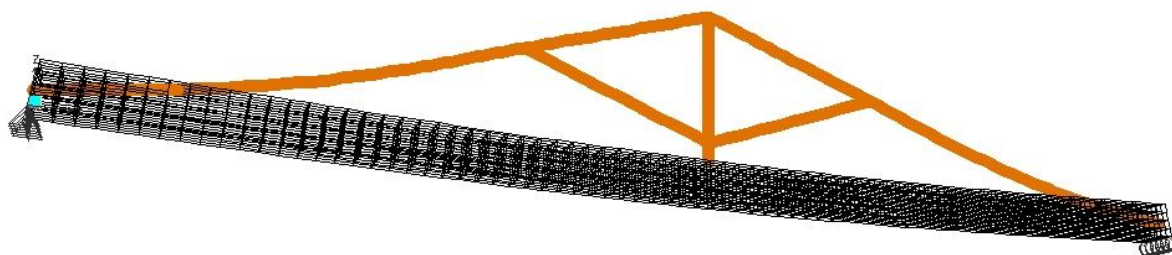


Fig. 7a – Configurazione deformata in elementi *Brick* e *Frame*

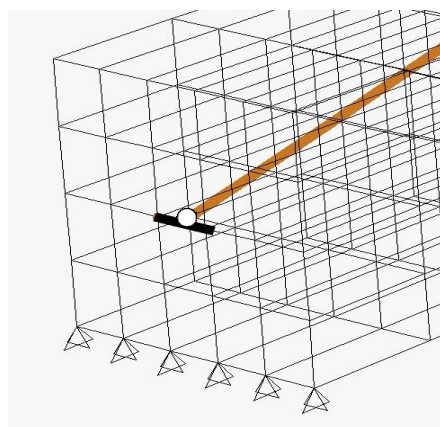


Fig. 7b – Particolare della connessione puntone/catena nella modellazione ad elementi finiti

A seguito dell'analisi condotta coi due tipi di elementi, sono rispettivamente riportate nelle Figg.8a e 8b le distribuzioni delle azioni assiali e dei momenti flettenti sugli elementi *Frame*. Per quanto riguarda in particolare i puntoni, l'azione assiale massima risultante dall'elaborazione è pari a 774 kN, mentre il momento massimo con fibre inferiori tese è di 107 kNm, dando luogo in sintesi ad una tensione normale massima nella direzione dell'asse dei puntoni pari a circa 5,2 Mpa.

Rispetto all'analisi eseguita come descritto al Par.4.1 coi soli elementi *Frame*, tali valori risultano leggermente differenti, con un errore percentuale tuttavia accettabile e presumibilmente dovuto alla modellazione resasi necessaria in corrispondenza della connessione puntone/catena, sopra citata.



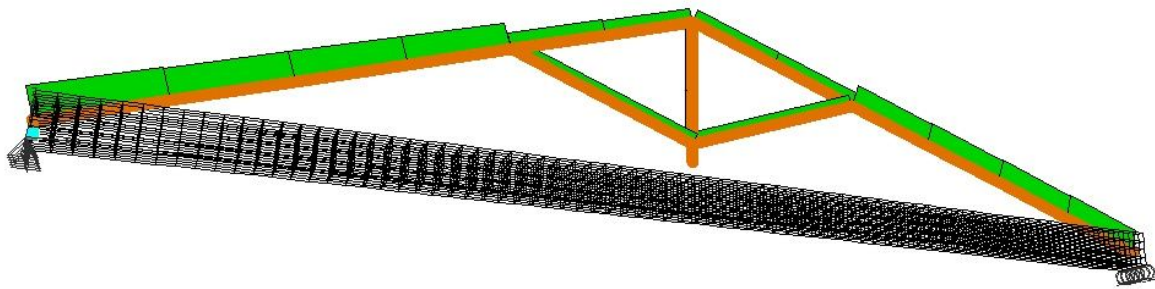


Fig. 8a – Sollecitazioni assiali sugli elementi *Frame* con analisi condotta su elementi *Brick* e *Frame*

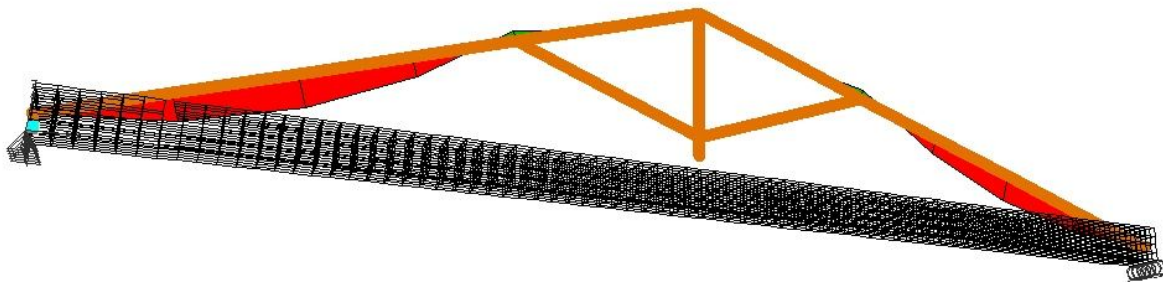


Fig. 8b – Sollecitazioni flettenti sugli elementi *Frame* con analisi condotta su elementi *Brick* e *Frame*

Per quanto riguarda la catena, i risultati, espressi direttamente in termini di *stress*, sono riportati nelle Figg. 9a e 9b. In particolare, la Fig. 9a descrive la distribuzione degli sforzi normali nella direzione dell'asse dell'elemento, che si mantengono, secondo quanto rappresentato nella scala cromatica evidenziata, nell'intervallo 3,5÷7 MPa. In realtà il loro valore massimo, presente intorno alla mezzeria, è pari a 5,64 MPa, valore pressoché coincidente con quello ottenuto dall'analisi con soli elementi *Frame*, come derivante dal calcolo delle sollecitazioni assiale e flettente massime.

La Fig. 9b descrive invece l'andamento degli sforzi di Von Mises che, a differenza della tensione calcolata al Par. 4.1, tengono conto anche degli sforzi tangenziali dovuti agli effetti taglianti. Gli intervalli di tensione risultano maggiormente differenziati, diminuendo nel procedere dalle fibre inferiori a quelle superiori, ed il valore massimo in mezzeria risulta soltanto di poco superiore alla massima tensione normale (5,65 MPa). Ciò avrebbe potuto essere anticipato anche dai valori ottenuti, coi soli elementi *Frame*, per l'azione tagliante sulla catena, con un massimo pari a soli 4kN.

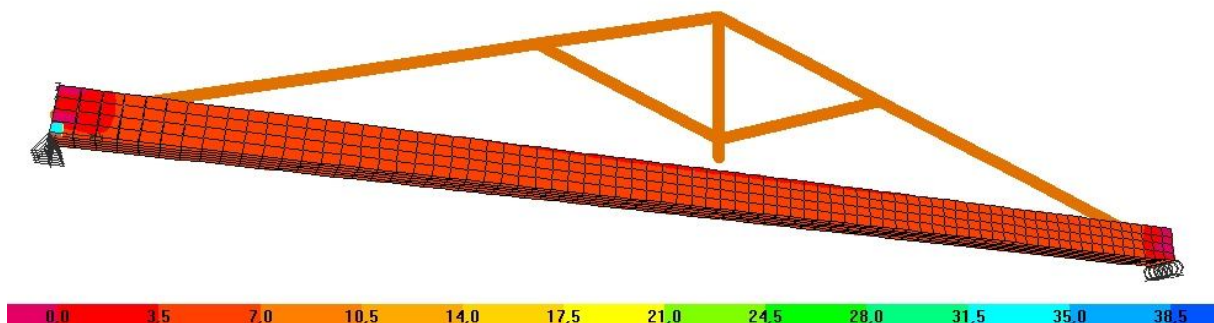


Fig. 9a – Tensioni normali sugli elementi *Brick* della catena, agenti nella direzione del suo asse



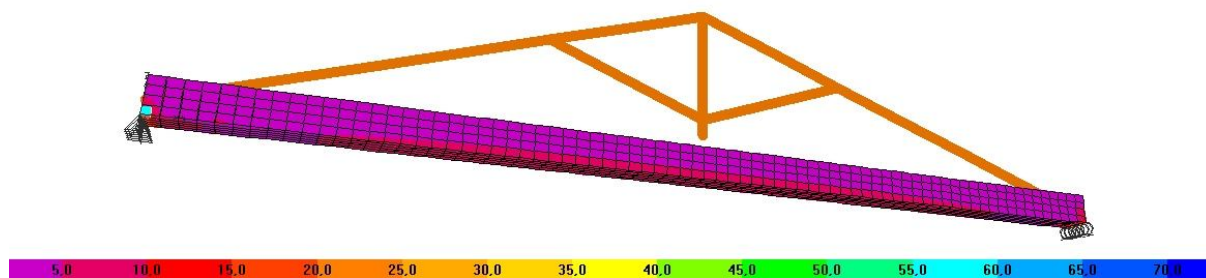


Fig. 9b – Tensioni di Von Mises sugli elementi *Brick* della catena

## 5. ANALISI DEI RISULTATI E CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Il confronto tra i risultati ottenuti attraverso i due tipi di analisi costituisce una validazione reciproca dei modelli utilizzati. Di conseguenza, il modello basato sulla discretizzazione della catena mediante elementi finiti solidi può essere utile impiegato, in sviluppi successivi, allo scopo di introdurre un eventuale rinforzo in corrispondenza del suo intradosso. In lavori precedenti [6][7], ad esempio, veniva esaminato il caso di un tessuto in materiale fibrorinforzato applicato al lembo inferiore di una trave lignea inflessa.

Con riferimento alla capriata esaminata nel presente lavoro, le tensioni all'intradosso della catena – elemento critico per il corretto funzionamento dell'intera struttura – mostrano valori accettabili con riguardo ad una verifica di sicurezza; tuttavia, eventuali condizioni di degrado, dovute ad agenti biologici od ambientali – e da esaminare in maggior dettaglio tramite specifiche analisi strumentali – potrebbero aver alterato le proprietà meccaniche del legno, rendendo necessaria l'applicazione di un rinforzo.

Per quanto riguarda inoltre il livello di infittimento nella discretizzazione della catena, verosimilmente elevato per gli scopi di questo lavoro, può rendersi essenziale per predisporre il modello all'applicazione di svariati tipi di rinforzo, con configurazioni variabili lungo l'elemento: a tale scopo, il file di input per l'analisi ad elementi finiti è stato generato in modo automatico attraverso un opportuno codice di calcolo, realizzato in modo tale da consentire una rapida parametrizzazione nel modello.

## 6. RINGRAZIAMENTI

Il presente lavoro è stato effettuato con il contributo finanziario del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Sgorbini, R., Controlli diagnostici di tipo non distruttivo sulle strutture, Tesi di Laurea, Università di Pavia, A.A. 2009-10.
- [2] Piazza, M., Tomasi, R., Modena, R., Strutture in legno. Materiale, calcolo e progetto secondo le nuove normative europee, *Ed. Hoepli*, 2005.
- [3] Tingley, D., Kent, S., Structural Evaluation of fiber reinforced hollow wood beams, 2001 IABSE Conference, Lahti, International Association For Bridge And Structural Engineering, 2001.
- [4] Borri, A., Corradi, M., Speranzini, E., Travi in legno rinforzate con barre o con tessuti in fibra di carbonio, *L'Edilizia*, Editrice De Lettera, 8-9, agosto-settembre, anno XV, Milano, pp. 48-56, 2001.
- [5] Borri, A., Corradi, M., Grazzini, A., A method for flexural reinforcement of old wood beams with CFRP

materials, *Composites*, 2004.

- [6] Carino, C., Rinallo, L.M.A., Analisi di una trave lignea inflessa rinforzata mediante tessuti in FRP, Collana rapporti scientifici, Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura dell'Università di Pavia, Anno Accademico 2013/14.
- [7] Carino, C., Carli, F., Finite Element Analysis of a Spruce Timber Beam Reinforced by FRP Fabrics , *International Journal of Applied Engineering Research*, ISSN 0973-4562, Volume 11, n.9, pp 6731-6735, 2016.