Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Engenharia Informática e de Computadores
Teoria dos Sinais e dos Sistemas

Resumo dos conceitos matemáticos mais utilizados

Artur Ferreira {arturj@isel.pt}

1 Outubro 2001 Versão 1.0

Motivação e Objectivos

Este pequeno tutorial tem como objectivo apresentar um resumo dos conceitos matemáticos mais utilizados ao longo da disciplina de Teoria dos Sinais e dos Sistemas e das disciplinas seguintes no ramo de análise de sinais. Dá-se especial ênfase aos números complexos e a funções que os manipulam. Apontam-se temas de estudo futuro, tal como a série e transformada de *Fourier*, as operações de correlação e convolução.

Índice

1 Números complexos

Os números complexos constituem uma das ferramentas matemáticas essenciais na análise e processamento de sinal. A sua utilização é necessária, essencialmente na análise de sinais no domínio da frequência, através da série e transformada de *Fourier*.

Um número complexo $z = (a, b)$ é constituído por um par de números reais a e b. O valor a é a parte real $a = Re\{z\}$ e o valor b é a parte imaginária $b = Im\{z\}$. O conjunto dos números complexos $\mathbf{C}$ define-se da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \{z : z = a + jb \quad a, b \,\epsilon\, \Re \quad \wedge \quad j^2 = -1\}$$

em que j é o número imaginário puro[1].

1.1 Representação de números complexos

Existem duas formas clássicas para a representação do número complexo:

- a forma **cartesiana** (ou algébrica) em que se representam separadamente as partes real e imaginária à custa do número imaginário puro j: $z = a + jb$;
- a forma **polar** (ou trigonométrica) que consiste na representação em termos de <u>módulo</u> $|z|$ e <u>argumento</u> $arg(z)$: $z = |z|e^{jarg(z)}$.

1.1.1 Forma cartesiana (ou algébrica)

A forma cartesiana é a seguinte: $z = a + jb$
Parte real: $Re\{z\} = a$
Parte imaginária: $Im\{z\} = b$
Módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argumento: $arg(z) = \Theta = \arccos\left(\frac{a}{|z|}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{|z|}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

1.1.2 Forma polar (ou trigonométrica)

A forma polar é a seguinte: $z = |z|e^{jarg(z)} = |z|e^{j\Theta}$.
Tendo em conta a fórmula de *Euler*:

$$e^{j\Theta} = \cos(\Theta) + j\sin(\Theta)$$

a forma polar é equivalente a:

$$z = |z|e^{j\Theta} = |z|(cos(\Theta) + j\sin(\Theta)) = \underbrace{|z|cos(\Theta)}_{Re(z)} + j\underbrace{|z|\sin(\Theta)}_{Im(z)}$$

pelo que se conclui:

$$a = Re(z) = |z|\cos(\Theta) \qquad\qquad b = Im(z) = |z|\sin(\Theta)$$

permitindo assim a conversão entre formatos, resumida já de seguida.

1.1.3 Conversão entre os dois formatos

<u>**Forma cartesiana para a polar:**</u>
Considere o número complexo $z_1 = a + jb$, escrito na forma cartesiana. A conversão deste número para a forma polar produz o seguinte resultado:

$$z_1 = (\sqrt{a^2 + b^2})e^{j\arctan\left(\frac{Im\{z_1\}}{Re\{z_1\}}\right)} = (\sqrt{a^2 + b^2})e^{j\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Exemplos:

$$z_1 = 1 + j \longrightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad z_2 = j4 \longrightarrow z_2 = 4e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad z_3 = \sqrt{3} + j \longrightarrow z_3 = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

[1]Nas diversas áreas da Engenharia o número imaginário puro é representado pelo símbolo j, uma vez que o símbolo i representa corrente eléctrica.

Forma polar para a cartesiana:

Seja agora $z_2 = |z_2|e^{j\Theta_2}$, número complexo escrito na forma polar. A forma cartesiana é obtida da seguinte maneira:

$$z_2 = |z_2|(cos(\Theta_2) + j\sin(\Theta_2)) = |z_2|cos(\Theta_2) + j|z_2|\sin(\Theta_2) = a + jb$$

Exemplos:

$$\begin{cases} z_1 = 5e^{j\frac{\pi}{2}} \longrightarrow z_1 = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j5 \\ z_2 = 3e^{j\frac{\pi}{3}} \longrightarrow z_2 = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + j\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1.1.4 Representação geométrica: o plano complexo

Os números complexos são representados graficamente no plano complexo (ou de Argand[2]), que não é mais que um sistema de dois eixos ortogonais. Num eixo representa-se a parte real e no outro a parte imaginária. O

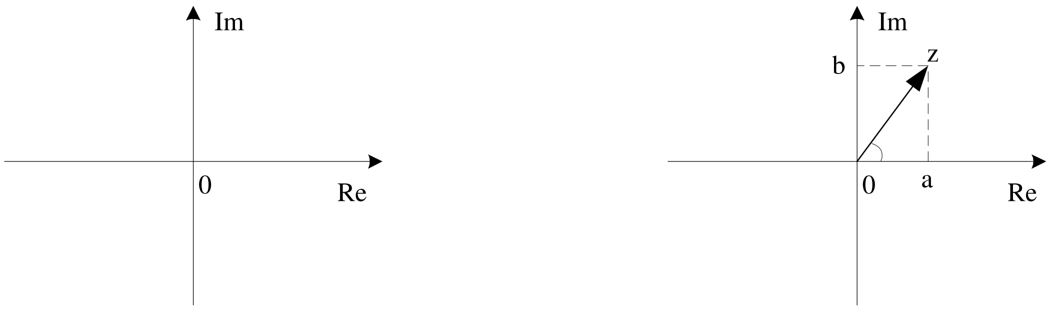

Figura 1: a) O plano complexo. b) Representação de um número $z = a + jb$ sobre o plano complexo.

módulo do número complexo corresponde à norma do vector que o representa no plano complexo. O argumento é o ângulo formado entre este vector e o eixo dos reais (a origem do referencial).

1.2 Operações com números complexos

Sejam $z_1 = a + jb = |z_1|e^{jarg(z_1)}$ e $z_2 = c + jd = |z_2|e^{jarg(z_2)}$. A representação cartesiana é adequada para realizar as operações de adição e subtracção, ao passo que a forma polar é mais vocacionada para operações tais como multiplicação, divisão e potenciação, através das fórmulas de *Moivre*.

Na forma cartesiana:

- **Adição**: $z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d)$
- **Subtracção**: $z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d)$

Na forma polar (fórmulas de *Moivre*):

- **Multiplicação**: $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{j(arg(z_1)+arg(z_2))}$
- **Divisão**: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(arg(z_1)-arg(z_2))}$
- **Potência**: $z_1^n = |z_1|^n e^{jnarg(z_1)}$
- **Radiciação**: $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}e^{j\left(\frac{\Theta+2k\pi}{n}\right)}$

[2]Em homenagem ao matemático com o mesmo nome.

1.3 Complexos que se relacionam entre si

Seja $z_1 = a + jb = |z_1|e^{j\Theta}$.
Conjugado: $\bar{z_1} = a - jb = |z_1|e^{-j\Theta}$.
Simétrico: $-z_1 = -a - jb = |z_1|e^{j(\Theta+\pi)}$.

1.3.1 Propriedades que relacionam um complexo com o seu conjugado

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$z + \bar{z} = 2Re\{z\}$$

$$z - \bar{z} = j2Im\{z\}$$

1.4 Fórmulas de Euler

A fórmula de *Euler*[3], vulgarmente conhecida por exponencial complexa é a seguinte:

$$e^{j\alpha} = cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$

Aplicando o conjugado obtém-se:

$$e^{-j\alpha} = cos(\alpha) - j\sin(\alpha)$$

Note que:

- $|e^{j\alpha}| = |e^{-j\alpha}| = \sqrt{cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1$, pela fórmula fundamental da trigonometria;
- $arg(e^{j\alpha}) = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) = \arctan(\tan(\alpha)) = \alpha$
- $arg(e^{-j\alpha}) = \arctan\left(\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}\right) = \arctan\left(\frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) = \arctan(-\tan(\alpha)) = -\alpha$

As funções trigonométricas *coseno* e *seno* constituem a parte real e imaginária da fórmula de *Euler*, respectivamente. Atendendo às propriedades que relacionam o número complexo com o seu conjugado tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \frac{1}{2}e^{j\alpha} + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} = \frac{-j}{2}e^{j\alpha} + \frac{j}{2}e^{-j\alpha}$$

1.5 Funções envolvendo números complexos

Para além das funções reais de variável real, as funções que utilizam números complexos como domínio e/ou contradomínio são frequentemente utilizadas. Os quatro tipos possíveis de função são os seguintes:

1- Função real de variável real: $x : \Re \longrightarrow \Re$;

2- Função real de variável complexa: $x : C \longrightarrow \Re$;

3- Função complexa de variável real: $x : \Re \longrightarrow C$;

4- Função complexa de variável complexa: $x : C \longrightarrow C$.

As funções complexas (cujo contradomínio é o conjunto dos números complexos) **C** podem ser analisadas separadamente em módulo e fase. Por exemplo, a função complexa de variável real $x(t) = \frac{1}{1+jt}$ pode ser decomposta em duas:

[3]Leonhard Euler(1707-1783). No URL http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html pode consultar a biografia deste matemático.

- **módulo**: $|x(t)| = \frac{1}{\sqrt{1^2+t^2}}$
- **fase**: $arg\{x(t)\} = arg(1) - arg\left(\frac{t}{1}\right) = 0 - \arctan(t) = -\arctan(t)$.

Consequentemente a função $x(t)$ escrita na forma polar tem a seguinte expressão:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1^2+t^2}} e^{-j\arctan(t)}$$

Seguem-se alguns exemplos de funções dos tipos apresentados acima:

1. Funções reais de variável real: $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = 1 + t$;
2. Funções reais de variável complexa: $x_1(z) = |z|$, $x_2(z) = 1 + |z|^2$ e $x_3(z) = z + \bar{z}$;
3. Funções complexas de variável real: $x_1(t) = 1 + j\cos(t)$, $x_2(t) = t + j$ e $x_3(t) = \frac{1}{jt^2}$;
4. Funções complexas de variável complexa: $x_1(z) = z(2 + j)$, $x_2(z) = \bar{z} + 1$ e $x_3(z) = z^5$.

2 Identidades trigonométricas

A utilização de algumas identidades trigonométricas simplifica o cálculo integral de funções trigonométricas e evidencia determinadas características dos sinais. Apresenta-se um conjunto de expressões utilizadas com alguma frequência.

- **Fórmula fundamental da trigonometria**
  $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$
- **Relação entre *seno* e *coseno***
  $\cos(a) = \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$
  $\sin(a) = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$
- **Fórmulas de adição**
  $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
  $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$
- **Fórmulas de duplicação**
  $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$
  $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- **Potência de 2**
  $\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$
  $\sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)$
- **Fórmulas do produto**
  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$
  $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$
  $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b)$

2.1 Relação com as fórmulas de *Euler*

Efectua-se a verificação da fórmula fundamental da trigonometria, através das fórmulas de *Euler*:

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = \left(\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}\right)^2 + \left(\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{e^{j2\alpha} - 2 + e^{-j2\alpha}}{-4} + \frac{e^{j2\alpha} + 2 + e^{-j2\alpha}}{4} =$$

$$\frac{-e^{j2\alpha} + 2 - e^{-j2\alpha}}{4} + \frac{e^{j2\alpha} + 2 + e^{-j2\alpha}}{4} = \frac{-e^{j2\alpha} + 2 - e^{-j2\alpha} + e^{j2\alpha} + 2 + e^{-j2\alpha}}{4} = 1$$

3 Sinais com simetria par e ímpar e suas propriedades

A simetria exibida pelas funções é frequentemente explorada nos cálculos realizados, no sentido da sua simplificação. A inferência de determinadas propriedades dos sinais, a partir das suas simetrias (ou da sua ausência) também é um aspecto a ter em conta. Um sinal par apresenta simetria em torno do eixo dos yy, ou seja o primeiro e quarto quadrantes são simétricos relativamente ao segundo e terceiro quadrantes. Por sua vez, um sinal ímpar apresenta simetria entre o primeiro e terceiro quadrantes, ou entre o segundo e o quarto. As definições de sinal par e ímpar apresentam-se de seguida.

- $x(t)$ é **par** sse: $x(t) = x(-t), \forall\ t \ \epsilon\ \Re$;
- $x(t)$ é **ímpar** sse: $x(t) = -x(-t), \forall\ t \ \epsilon\ \Re$.

A figura abaixo exemplifica sinais com simetria par, ímpar e sem simetria:

- Simetria par: $x(t) = |t|$;
- Simetria ímpar: $y(t) = t$;
- Sem simetria: $z(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \end{cases}$

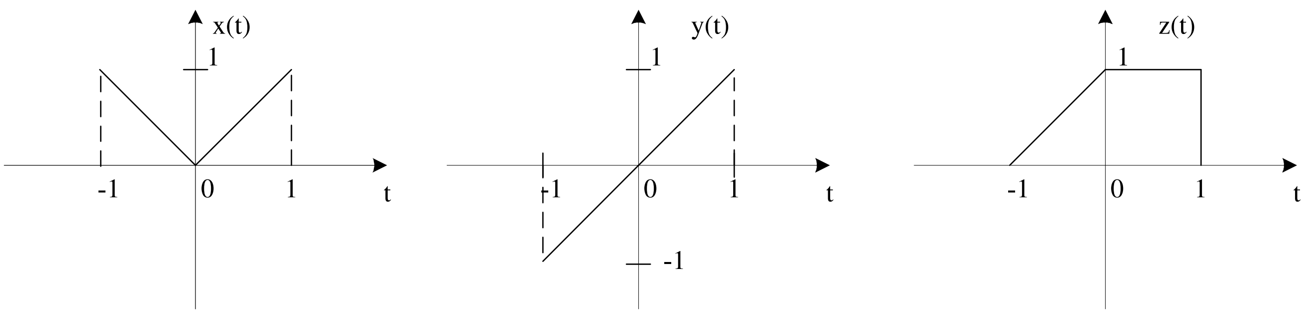

Figura 2: a) Simetria par. b) Simetria ímpar. c) Ausência de simetria.

3.1 Decomposição de sinal a partir das componentes par e ímpar

No caso geral, qualquer sinal $x(t)$ é decomposto à custa da soma de um sinal $x_e(t)$ com simetria par (a componente par) e outro de simetria ímpar $x_o(t)$ (a componente ímpar):

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = \underbrace{\frac{x(t)+x(-t)}{2}}_{x_e(t)} + \underbrace{\frac{x(t)-x(-t)}{2}}_{x_o(t)}$$

3.2 Integração de sinais par e ímpar

Devido às simetrias, a integração de sinais par e ímpar é simplificada. Sabendo que $x(t)$ é **ímpar**, tem-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ dt = 0$$

No caso de $x(t)$ ser **par**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ dt = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\ dt = 2\int_{-\infty}^{0} x(t)\ dt$$

3.3 Simetrias da soma e do produto

As tabelas seguintes sintetizam as simetrias obtidas pela soma e produto de dois sinais.

+	Par	Ímpar
Par	Par	Sem simetria
Ímpar	Sem simetria	Ímpar

*	Par	Ímpar
Par	Par	Ímpar
Ímpar	Ímpar	Par

Considere as propriedades da integração de funções par e ímpar, e as simetrias apresentadas nestas tabelas. Tendo em conta que $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ tem-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ dt = 2\int_{0}^{\infty} x_e(t)\ dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\ dt = 2\int_{0}^{\infty} x_e^2(t)\ dt + 2\int_{0}^{\infty} x_o^2(t)\ dt$$

como a seguir se demonstra:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x_e(t) + x_o(t))\ dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\ dt + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\ dt}_{0} = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\ dt = 2\int_{0}^{\infty} x_e(t)\ dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x_e(t) + x_o(t))^2\ dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x_e^2(t) + 2x_e(t)x_o(t) + x_o^2(t))\ dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)\ dt + 2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)\ dt}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)\ dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)\ dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)\ dt = 2\int_{0}^{\infty} x_e^2(t)\ dt + 2\int_{0}^{\infty} x_o^2(t)\ dt$$

3.4 Exemplos de cálculo de componentes par e ímpar

A função trigonométrica *coseno*, verifica $\cos(t) = \cos(-t), \forall\ t\ \epsilon\ \Re$, pelo que é par. Por sua vez, a função *seno*, verifica $\sin(t) = -\sin(-t), \forall\ t\ \epsilon\ \Re$, pelo que é ímpar.

Tendo em conta estas propriedades, vamos decompor os sinais $x_1(t) = 1 + 2\cos(t) + 3\sin(t)$ e $x_2(t) = 2\cos(t + \frac{\pi}{4})$ nas suas componentes par e ímpar:

$$x_1(t) = 1 + 2\cos(t) + 3\sin(t) \Rightarrow \begin{cases} x_{1e}(t) = 1 + 2\cos(t) \\ x_{1o}(t) = 3\sin(t) \end{cases}$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos(t) - \sqrt{2}\sin(t) \Rightarrow \begin{cases} x_{2e}(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ x_{2o}(t) = -\sqrt{2}\sin(t) \end{cases}$$

4 Decomposição de funções em forma de série

A decomposição em série de uma função consiste na sua escrita à custa da soma de termos(funções) que em cada ponto converge para o valor da função a ser aproximada. Considere uma função que num determinado ponto tem o valor S. A sua aproximação em série, nesse ponto, utilizando N termos, toma o valor S_N tal que:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_{N-1}$$

Consoante a função e os termos da série, a aproximação exacta pode requerer a soma de infinitos termos:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

4.1 Séries de *Taylor* e *McLaurin*

A série de *Taylor*, é um exemplo da decomposição em série na forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{t_0}^{(n)}}{n!}(t-t_0)^n$$

onde $x_{t_0}^{(n)}$, representa a derivada de ordem n da função $x(t)$ calculada no ponto t_0.
A série de *McLaurin* constitui um caso particular, da série de *Taylor* com $t_o = 0$.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{0}^{(n)}}{n!}(t)^n$$

Apresentam-se três exemplos de decomposição em série de *McLaurin* de funções conhecidas:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

4.2 Série de *Fourier*

A série de *Fourier*[4] aplica-se a sinais periódicos. Um sinal é periódico (ou estritamente repetitivo) se cumprir a condição:

$$x(t) = x(t + kT)$$

em que T representa o período do sinal e k é inteiro relativo $\neq 0$.
Um sinal periódico $x(t)$ com frequência fundamental f_o pode ser escrito na forma da soma de sinusóides com frequência f_o e suas múltiplas: kf_o.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{j2\pi k f_o t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](\cos(2\pi k f_o t) + j\sin(2\pi k f_o t))$$

Os coeficientes $x[k]$ (complexos) são calculados da seguinte forma:

$$x[k] = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} x(t)e^{-j2\pi k f_o t}dt$$

4.2.1 Exemplos

A título de exemplo, apresenta-se de seguida a decomposição de três sinais periódicos na série de *Fourier*. Repare na utilização das fórmulas de *Euler*.

$$x(t) = 4\cos(2\pi 100t) + 2\cos(2\pi 200t) = 4\left(\frac{e^{j2\pi 100t} + e^{-j2\pi 100t}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^{j2\pi 200t} + e^{-j2\pi 200t}}{2}\right) =$$

$$= 2e^{j2\pi 100t} + 2e^{-j2\pi 100t} + e^{j2\pi 200t} + e^{-j2\pi 200t}$$

$$y(t) = 1 + 2\sin(2\pi 45t) = 1 + 2\left(\frac{e^{j2\pi 45t} - e^{-j2\pi 45t}}{2j}\right) = 1 - je^{j2\pi 45t} + je^{-j2\pi 45t}$$

$$z(t) = \cos(2\pi 10t) + \sin(2\pi 10t) = \left(\frac{e^{j2\pi 10t} + e^{-j2\pi 10t}}{2}\right) + \left(\frac{e^{j2\pi 10t} - e^{-j2\pi 10t}}{2j}\right) =$$

$$\frac{1}{2}e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2j}e^{j2\pi 10t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 10t} = \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)e^{j2\pi 10t} + \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)e^{-j2\pi 10t}$$

[4] A ser estudada em detalhe nas aulas teóricas.

5 Cálculo matricial

Na área de processamento de sinal, no domínio discreto, a multiplicação de matrizes é utilizada, por exemplo, para o cálculo das operações de correlação e convolução[5].

A multiplicação de matrizes é possível quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz. Por exemplo, sejam A e B as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O produto AB resulta na matriz C, apresentada de seguida. Por sua vez, o produto BA não está definido.

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

5.1 Matriz de *Toeplitz*

A matriz de *Toeplitz* tem uma configuração especial na medida em que apresenta sempre determinado elemento ao longo da diagonal principal e das subdiagonais. É utilizada para realizar as operações de correlação e convolução referidas acima. Mais concretamente, a matriz de *Toeplitz*, descreve a relação entrada/saída de sistemas lineares e invariantes no tempo. A matriz quadrada de *Toeplitz* com dimensão N tem a forma apresentada à esquerda. Na parte direita apresenta-se um exemplo para $N = 3$.

$$\mathbf{T_N} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-N+1} \\ t_1 & t_0 & & t_{-N+2} \\ t_2 & t_1 & & \vdots \\ \vdots & & & t_{-1} \\ t_{N-1} & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T_3} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

6 Transformações lineares

Uma transformação linear T define-se da seguinte forma:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

em que u e v são vectores e α e β são constantes.

A equação acima pode ser interpretada da seguinte forma: *A transformada da soma ponderada de vectores é igual à soma das transformadas individuais ponderadas pelas mesmas constantes de ponderação.*
ou ainda de outra forma:
A transformada da combinação linear é igual à combinação linear das transformadas individuais, com as mesmas constantes de ponderação.

6.1 Aplicações

A Transformada de *Fourier*, a estudar em detalhe nas aulas teóricas é linear. Serão ainda analisados sistemas lineares, ou seja, sistemas que realizam transformadas lineares.

7 Alguns *links* interessantes

Segue-se uma pequena lista de *links* para páginas relacionadas com matemática.

- Muita informação sobre vários ramos da matemática:
  http://www.sosmath.com

[5] Serão objecto de estudo a partir de meados do semestre.

- Universidade do estado da Florida, Estados Unidos:
  http://euclid.math.fsu.edu/Science/math.html
- Conjunto de *links* para páginas relativas a matemática:
  http://www.sosmath.com/wwwsites.html
- Introdução aos números complexos:
  http://www.clarku.edu/ djoyce/complex
- *Applet* em JAVA com operações sobre complexos:
  http://www.almide.demon.co.uk/html/Complex/Complex_Numbers_Made_Easy.html
- Tutoriais sobre números complexos:
  http://www.deetc.isel.ipl.pt/ftp/FicheirosSeccoes/AnaliseSinais/tutorials/ComplexVariables.pdf
  http://www.deetc.isel.ipl.pt/analisedesinai/tss/Tutorials/complex.pdf