Antonella Greco

Il mondo geometrico

E-Book di Geometria per il biennio

Volume unico

Garamond
[didattica digitale]

Via Tevere, 21 Roma

Prima edizione
Volume unico

Cod. ISBN 978-88-86180-58-0

INDICE GENERALE

Il Piano Euclideo

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA

PREREQUISITI
Saper riconoscere le figure geometriche piane;
Conoscere le definizioni delle figure geometriche

OBIETTIVI

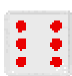
Sapere
Conoscere i concetti primitivi della geometria piana
Ripassare le conoscenze di geometria intuitiva apprese nella secondaria di primo grado
Conoscere i postulati di appartenenza e di ordine
Conoscere una semiretta;
Conoscere un segmento;
Conoscere una poligonale;
Conoscere le parti del piano;
Conoscere gli angoli e le loro proprietà
Conoscere i poligoni

Saper Fare
Saper utilizzare i postulati di appartenenza e di ordine
Saper rappresentare una semiretta
Saper rappresentare un segmento
Saper rappresentare una poligonale
Saper rappresentare le parti del piano
Saper rappresentare una poligonale
Saper distinguere i vari tipi di angoli

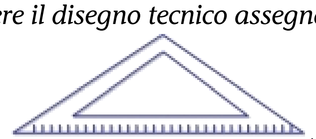
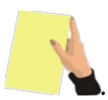
Nozioni di base

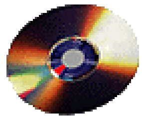
Hai mai osservato il mondo che ti circonda? Credo proprio di sì.
Prova a pensare a tutti gli oggetti che trovi nella tua stanza, nella tua aula e in tutto ciò che vedi.
Ti sei mai chiesto quale figura geometrica rappresentano?

Stai giocando a monopoli con i tuoi fratelli. Devi lanciare il dado
*Tuo fratello minore ti chiede: " **Qual è la forma del dado?"***
*Gli rispondi è un "**Cubo**".*



Devi svolgere il disegno tecnico assegnato per compito e ti serve :

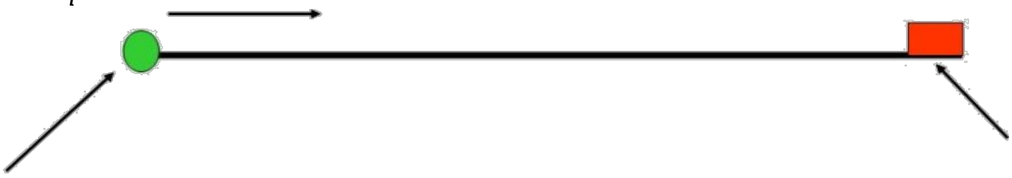
la squadra  *, la riga*  *e un foglio colorato* .
*La squadra è un **<triangolo>.***
*La riga e il foglio sono un **<rettangolo>***



Un tuo amico si è divertito con il ritocco fotografico e ti ha portato un cd con delle fotografie.
La forma del cd è un ***<cerchio>***

Un tuo amico ti mostra due fotografie la prima è  *un pallone da basket ed è una* ***<sfera>.***
La seconda è la medesima immagine rimpicciolita *e tu esclami ma è un* ***<punto>,*** *la palla non si distingue più.*

Devi andare a studiare da un tuo compagno di classe e lui ti spiega la strada.
"Abito in Viale Marconi al n° 54. Tu arrivi da Via Carducci e devi attraversare i giardini, poi prosegui diritto per 500 metri e trovi casa mia. Ti faccio uno schizzo con le indicazioni così sei tranquillo"



Il ***<cerchio>*** *sono i giardini, la* ***< retta>*** *è il viale, il* ***<rettangolo>*** *è l' abitazione.*

Avrai compreso che molti oggetti che ci circondano possono essere associati a delle **figure geometriche** tenendo conto solo della loro forma o estensione.

Definizione

Si definisce **figura geometrica** un qualunque insieme di punti non vuoto

Riprendiamo un esempio tra quelli incontrati:

La squadra è simile ad un triangolo 

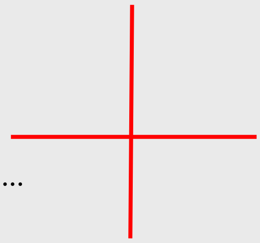
Possiamo definire il triangolo affermando che "è un poligono che ha tre lati". Ma cosa vuol dire definire un oggetto?

La **definizione** è una proposizione nella quale si spiega la natura dell' ente o del concetto utilizzando concetti o enti definiti in precedenza e gli si attribuisce un nome

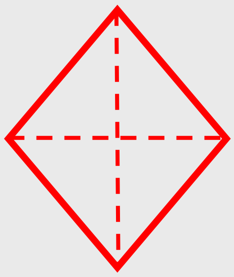
Verifica se hai compreso

Completa le seguenti definizioni di figure geometriche

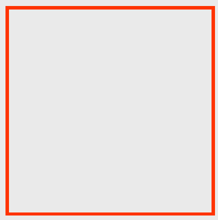
A. La figura rappresenta due rette ....
Due rette sono perpendicolari quando formano quattro angoli
....



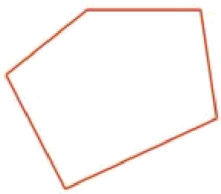
B. Osserva la figura è un ....
Il rombo è un ....,
avente quattro lati ....
e le diagonali tra loro..



C. Il quadrato è un ....,
avente quattro lati ....
e tutti gli angoli ....



A questo punto, perché sia chiara la definizione precedente, dobbiamo conoscere il significato di



poligono e di segmento

Per definire il concetto di segmento dobbiamo ricondurci al concetto di retta e per gli estremi del segmento al concetto di punto.
Possiamo poi, dal concetto di retta e di punto, ricondurci ad altri concetti ancora precedenti?

Siamo arrivati a due concetti retta e punto che non siamo in grado di definire, ma che intuitivamente conosciamo.

La retta e il punto sono chiamati Enti Primitivi proprio per il fatto che non sono riconducibili ad altri concetti ad essi precedenti.
Il foglio su cui noi disegniamo, scriviamo ecc… possiamo associarlo al concetto di piano, anche se il piano non ha dimensioni limitate come un foglio ma dobbiamo pensarlo esteso all'infinito nelle sue due dimensioni. Il piano contiene tutte le rette che vogliamo disegnare, i punti, le figure geometriche, ma non possiamo darne una definizione. **Il piano è un ente primitivo**.

I concetti o gli enti primitivi sono tutti quelli che non possono essere definiti tramite altri concetti e costituiscono la base per costruire tutte le altre definizioni.

Verifica se hai compreso

Individua il valore di verità delle seguenti affermazioni

Proposizione	Vero	Falso
La retta è una figura geometrica ma è anche un ente primitivo, quindi non possiamo definirlo		
Il trapezio è una figura geometrica , non è un ente primitivo ma non possiamo definirlo		
Il segmento è una figura geometrica e possiamo definirlo		
L' angolo è una figura geometrica, è un ente primitivo, quindi non possiamo definirlo		
Gli enti primitivi sono figure geometriche		
Le figure geometriche sono quelle definibili, quindi escludono gli enti primitivi		

Geometria Intuitiva e Deduttiva

La geometria **intuitiva** studia alcune proprietà delle figure geometriche basandosi sull' osservazione delle figure o tramite modelli delle figure (ad esempio di carta).

La geometria **"logico – deduttiva"** , invece si fonda sulle seguenti affermazioni:

- non è possibile dare la definizione di ogni singolo concetto, quindi è necessario avere dei concetti primitivi
- tutte le affermazioni non possono essere dimostrate (dedotte da altre). Esistono cioè delle affermazioni vere da noi accettate, ma non dimostrabili. Tali affermazioni si dicono **Assiomi o postulati.**
- Le affermazioni dimostrabili sono dette **Teoremi** e per verificarne la veridicità si utilizzano assiomi o teoremi precedentemente dimostrati.

I **teoremi** sono proprietà vere, ma dimostrabili tramite deduzione logica a partire da altri teoremi dimostrati in precedenza o da assiomi**.**
Un **teorema** è composto da un enunciato e dalla relativa dimostrazione.

L'enunciato di un teorema si può sempre dividere in due parti:

- l'**ipotesi**, che esprime ciò che si sa, il punto di partenza del ragionamento logico
- la **tesi**, che esprime ciò che si deve dimostrare, l'obiettivo della deduzion

Postulati di appartenenza e dell'ordine

Ti chiedo di disegnare degli oggetti. Osserva con attenzione quello che stai disegnando, perché al termine ti verrà posta una domanda.

Mettiti alla prova

Scegli un punto A. Scegli un punto B. Disegna la retta passante per A e B. Disegna la retta passante per B e A. "Per due punti quante rette passano?"

....

Scegli tre punti A, B e C . Costruisci la retta passante per due dei tre punti scelti . Ottieni una retta e un punto . Osserva con attenzione.
Possiamo affermare che la retta e il punto appartengono ad un medesimo piano?
SI' NO

Disegna una retta. Prendi su di essa un punto A. Dopo A prendi un punto B sempre sulla stessa retta. Leggi la posizione di A rispetto a B.
Puoi affermare che A precede B?

SI' NO

Leggi la posizione di A rispetto a B muovendoti verso sinistra.
Puoi affermare che A segue B?
SI' NO

Puoi affermare che su una retta si può scegliere il verso di percorrenza?
SI' NO

Svolgendo i quesiti avrai pensato:
Si sa che

- Dati due punti si ha una sola retta passante per essi
- Dati tre punti non allineati essi appartengono ad un solo piano
- Dati due punti su una retta e scelto un verso di percorrenza si può stabilire quale punto precede e quale segue.

Tali proprietà sono **postulati** della geometria, che esprimono proprietà intuitivamente vere, ma non dimostrabili
I primi due sono **Postulati di appartenenza** l' ultimo è un **Postulato dell' Ordine**.

Postulati di appartenenza

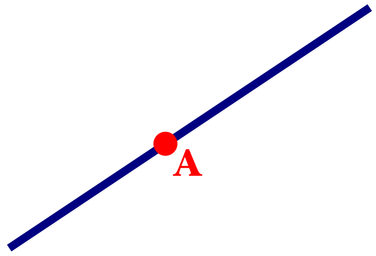
I postulati di appartenenza della retta affermano:

- Per due punti distinti passa una ed una sola retta, oppure due punti distinti appartengono ad una sola retta

- Una retta è composta da un insieme infinito di punti

Un punto si dice appartenente ad una retta quando giace sulla retta o è interno alla retta. Si scrive $A \in r$

Affermare che una retta passa per un punto equivale a dire che il punto deve appartenere alla retta.



Quando disegni su un foglio due punti e li congiungi ottieni una retta che si trova tutta all' interno della pagina.

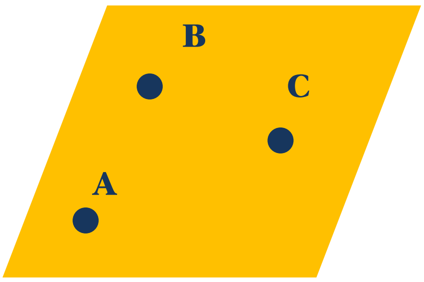
Se fissi due chiodi ad una parete e li colleghi con una corda tirata, puoi dire che la corda si trova tutta sulla parete.

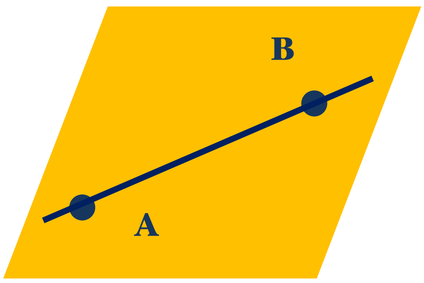
Intuitivamente possiamo affermare che il foglio e la parete sono dei piani che contengono una retta.

Possiamo enunciare le proprietà che intuitivamente conosciamo, sono i postulati di appartenenza del piano

Postulati di appartenenza del piano

- Tre punti non allineati appartengono ad uno e ad un solo piano
- Se due punti di una retta appartengono ad un piano, allora la retta congiungente i due punti appartiene al piano
- Ad un piano appartengono infiniti punti e infinite rette

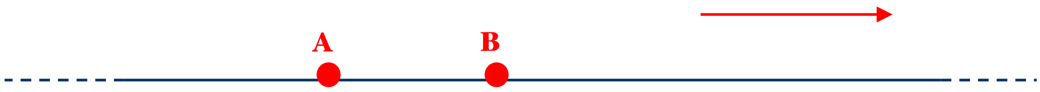




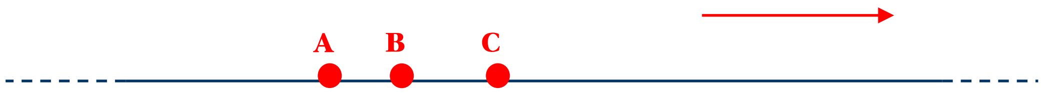
Postulati dell’ ordine

Scelto un verso di percorrenza su di una retta

- Presi due punti A e B della retta r , A precede B o B segue A

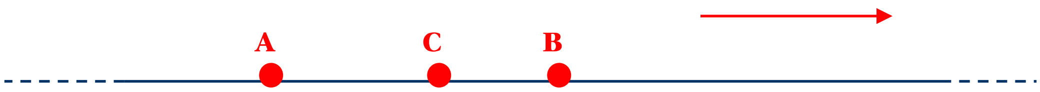


- Presi tre punti A , B e C della retta r , nel verso prefissato se A precede B e B precede C allora A precede C

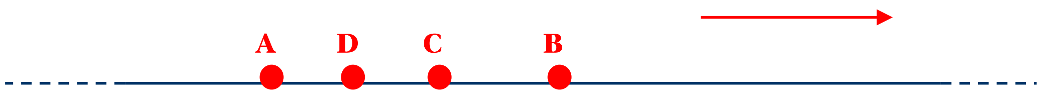


*Si può dedurre che un punto B è compreso tra A e C se segue A e precede C. Possiamo, quindi, affermare che una retta è un insieme **denso***

Scelti su una retta due punti A e B, esisterà sempre un terzo punto C che segue A e precede B.

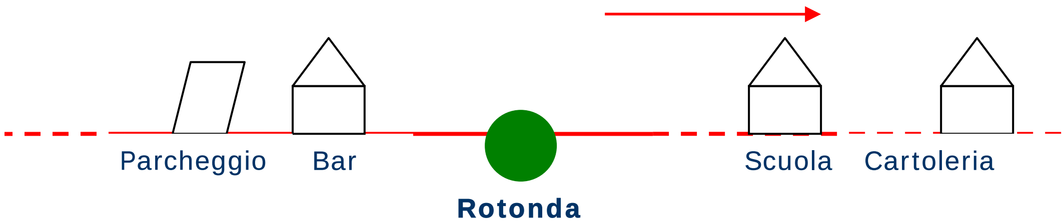


Se consideri i due punti A e C esisterà un quarto punto D che segue A e precede C



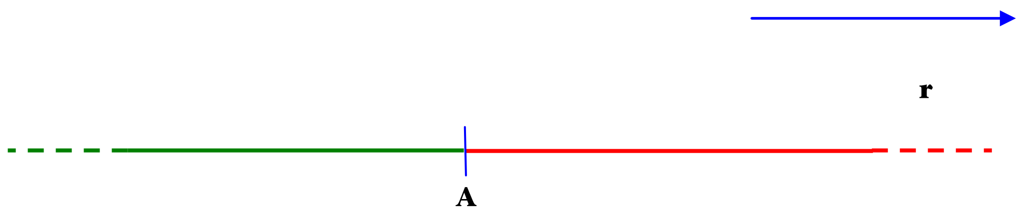
*Ripetendo tale procedimento all’infinito, poiché tra due punti qualsiasi di una retta ce n’è sempre uno intermedio, si può affermare che **una retta è un insieme denso di punti***

Le parti della retta e le poligonali



Sei alla finestra e osservi il lungo viale che si estende davanti a casa tua, con in mezzo una rotonda. Fissi il verso di osservazione da sinistra a destra. Puoi affermare che : Il parcheggio e il bar precedono la rotonda, mentre la scuola e la cartoleria seguono la rotonda. Concludi che tutte le costruzioni , anche quelle nascoste alla tua vista, che si trovano a destra della rotonda la seguono e quelle a sinistra la precedono

Possiamo rappresentare il viale con una retta r , la rotonda con un punto A appartenente alla retta, il verso di osservazione come verso di percorrenza



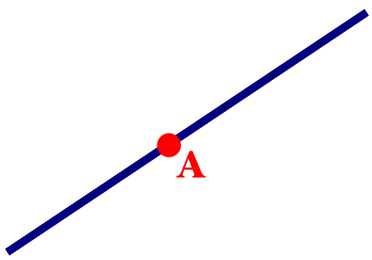
Si può affermare che il punto A divide la retta r in due parti:

Una composta dagli infiniti punti che **seguono A**, nel verso prefissato
Una composta dagli infiniti punti che **precedono A**, nel verso prefissato

Le due parti in cui abbiamo suddiviso la retta si chiamano **semirette**

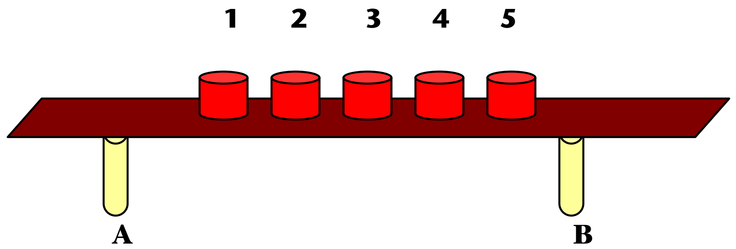
Definizione

Presa una retta r, stabilito su di essa un verso di percorrenza e fissato un punto A, si definisce **semiretta** di origine A l' insieme dei punti che seguono A nel verso prefissato, o l' insieme dei punti che precedono A**.**



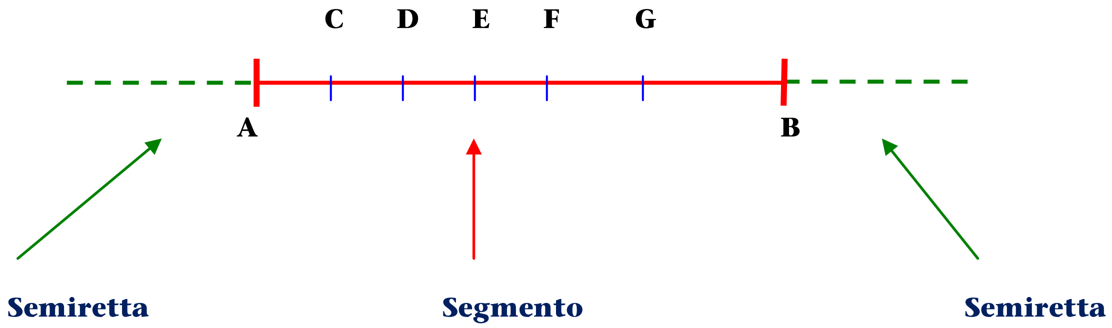
Segmento

Con i tuoi amici avete deciso di fare un gioco: “ Tirare una pallina di gomma contro 5 lattine appoggiate su una tavola di legno, rispettando l’ ordine numerico. Vince chi ne tira giù un numero maggiore”.
Avete le lattine e la pallina dovete solo montare la tavola. Decidete di costruire il tutto seguendo lo schema disegnato.



Dal disegno puoi affermare che A e B sono i punti fissi. Tutte le lattine sono comprese tra A e B.

Possiamo rappresentare la tavola con una retta r , i due piedi di appoggio con due punti A e B appartenenti alla retta e le lattine possiamo indicarle come ulteriori punti C, D, E, F, G.



Si può affermare che i punti A e B dividono la retta r in tre parti:

Una composta dagli infiniti punti che precedono A, la semiretta
Una composta dagli infiniti punti che seguono A e precedono B, detto segmento
Una composta dagli infiniti punti che seguono B, la semiretta;

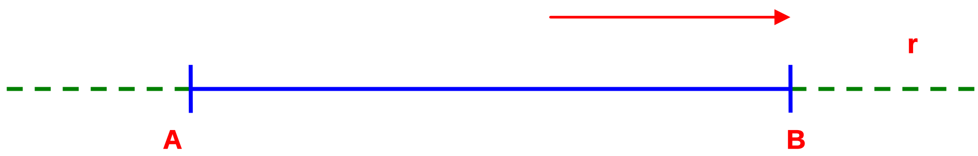
Definizione

Presa una retta r e due punti A e B sopra di essa, si definisce **segmento** l’insieme dei punti del piano che seguono A e precedono B.
A e B si dicono estremi del segmento e la retta r sostegno del segmento AB.

Possiamo concludere che la retta r è stata suddivisa in due semirette e in un segmento

Segmento Orientato

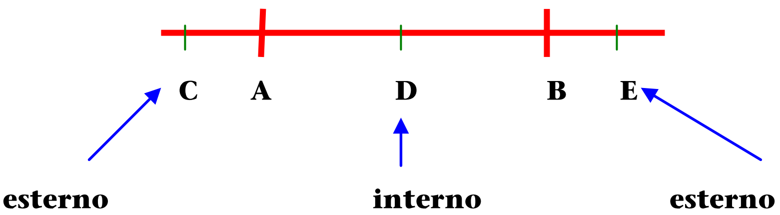
Data una retta r, fissato un verso di orientamento , scelti due punti A e B su di essa si definisce segmento orientato AB l' insieme dei punti che seguono A e precedono B



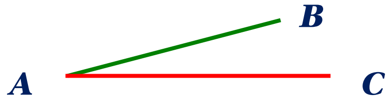
Proprietà

Dato un segmento AB se $A \equiv B$ allora il segmento si dice **nullo.**

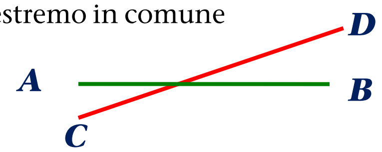
Dato un segmento AB i punti compresi tra A e B sono detti punti interni al segmento.
I punti che precedono A e seguono B sono detti esterni al segmento.



Due segmenti si dicono **consecutivi** quando hanno un estremo in comune



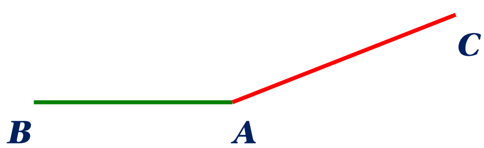
AB e BC sono consecutivi



AB e CD non sono consecutivi

Due segmenti si dicono **adiacenti** quando hanno un estremo in comune e giacciono sulla stessa retta

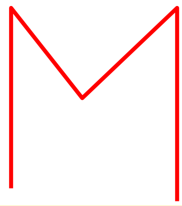
BA e AC sono adiacenti



BA e AC non sono adiacenti

Spezzate e poligonali

Osserva la figura, rappresenta la lettera dell' alfabeto M. Possiamo affermare che è composta da quattro segmenti. I segmenti sono tra loro tutti consecutivi.

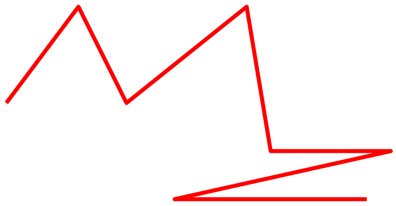


Definizione

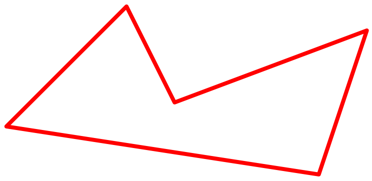
Figure composte da un insieme di segmenti consecutivi vengono dette **Spezzate**.
I segmenti che originano la spezzata sono i **lati** e i punti di incontro i **vertici.**

Esempi di spezzate

E' una spezzata semplice **aperta,** perché il primo estremo e l' ultimo non sono comuni a due lati.

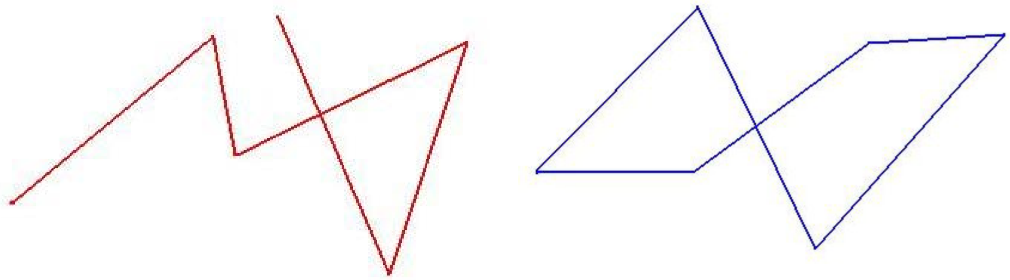


E' una spezzata semplice **chiusa** perché tutti i vertici sono in comune a due lati consecutivi.
Questa figura è anche detta **poligonale**.



Le spezzate considerate finora sono dette semplici perché in esse due segmenti non consecutivi non hanno punti in comune.

Se due lati non consecutivi si intersecano la spezzata si dice intrecciata.



Verifica se hai compreso

Individua il valore di verità delle seguenti affermazioni

Proposizione	Vero	Falso
Un segmento è un insieme di punti		
Una poligonale è sempre aperta		
Un segmento è l' insieme dei punti di una retta compresi tra gli estremi A e B		
Un segmento orientato AB è l' insieme dei punti di una retta che seguono A e precedono B		
Due segmenti si dicono adiacenti quando sono consecutivi e giacciono sulla stessa retta		
Una poligonale è composta da un insieme di segmenti adiacenti		
Un segmento AB è maggiore di un segmento CD quando A coincide con C e B cade sul prolungamento del segmento CD dopo D		

Semipiani

Una figura F si dice **convessa** se, scelti due punti qualsiasi A e B appartenenti a F, il segmento AB è tutto contenuto in F.
Una figura F si dice **concava** se, scelti due punti A e B appartenenti ad F, il segmento AB non è contenuto in F.

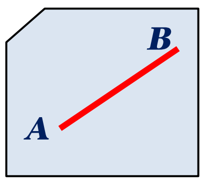


Figura convessa

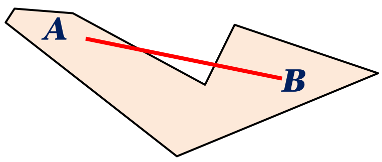
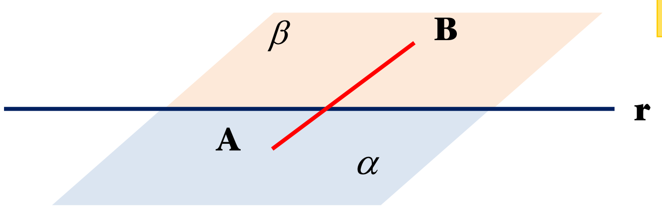


Figura concava

Postulato di Partizione di un piano

Dato un piano e una retta r appartenente al piano. Il piano è suddiviso da r in due sottoinsiemi disgiunti e convessi, **α** e β, tali che, presi due punti A e B con $A \in \alpha$ e $B \in \beta$, il segmento AB interseca la retta r in uno ed uno solo punto.

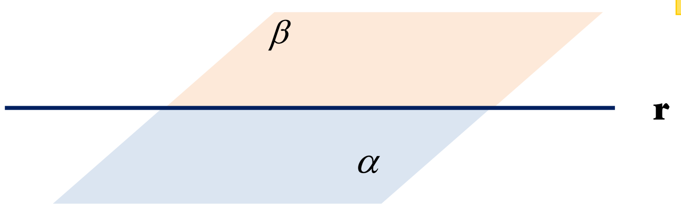
Insiemi disgiunti
Due insiemi si dicono disgiunti quando la loro intersezione da' l' insieme vuoto, cioè non hanno elementi in comune.
$A \cap B = \emptyset$



Semipiano

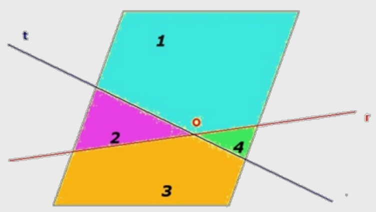
Dato un piano e una retta r appartenente al piano, si definisce **semipiano** la figura ottenuta dall' unione della retta r con una delle due parti **α** o β , in cui il piano è suddiviso.

Insieme Unione
L' unione di due insiemi A e B determina un insieme C composto da tutti gli elementi che appartengono ad A, a B e ad $A \cap B$.

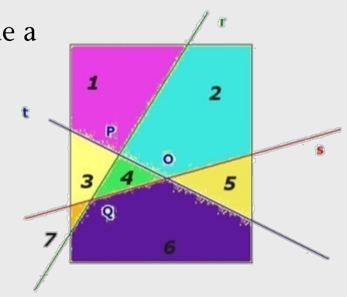


Mettiti alla prova

E' dato il piano α e due rette r e t incidenti nel punto O.
Il piano è suddiviso 4 parti



E' dato il piano α e tre rette r, s e t. Tali rette sono incidenti a due a due.
Il piano è suddiviso in 7 parti.



Verifica se hai compreso

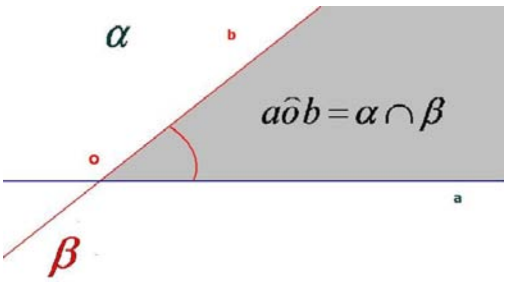
Individua il valore di verità delle seguenti affermazioni

Proposizione	**Vero**	**Falso**
Un semipiano è individuato dalla sua retta origine		
Per due punti appartenenti a due semipiani opposti non passa nessuna retta		
Un piano è un insieme di punti illimitato		
Se due punti A e B appartengono allo stesso semipiano allora il segmento AB giace nel medesimo semipiano		
Una poligonale, avente i vertici appartenenti a semipiani diversi, avrà almeno un lato che interseca la retta origine dei semipiani		

Gli angoli

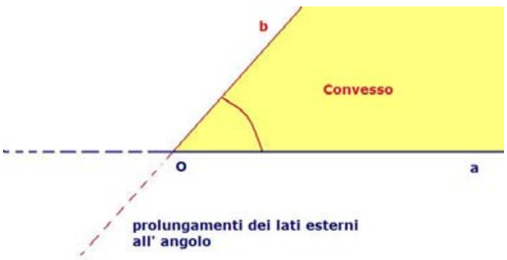
Definizione

Si definisce **angolo** quella parte di piano, intersezione tra i due semipiani originati dalle due semirette distinte Oa e Ob, avente come origine il punto in comune tra le due semirette e come contorno le due semirette.
Le semirette si dicono **lati** dell' angolo.
L' origine comune alle due semirette si dice **vertice** dell' angolo.

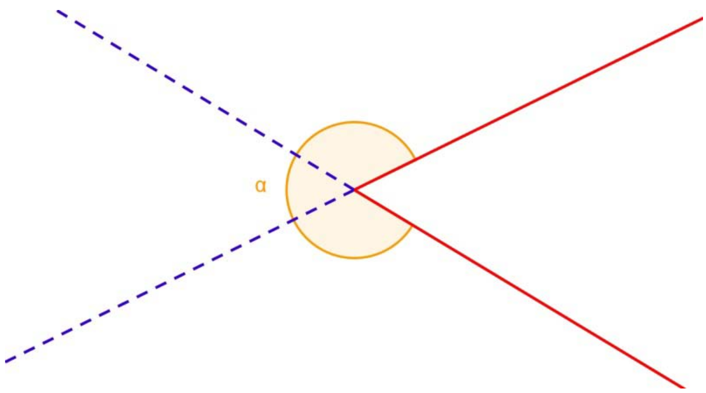


Proprietà

Un angolo $a\widehat{O}b$ è detto **convesso** quando non contiene, al suo interno, il prolungamento dei suoi lati.

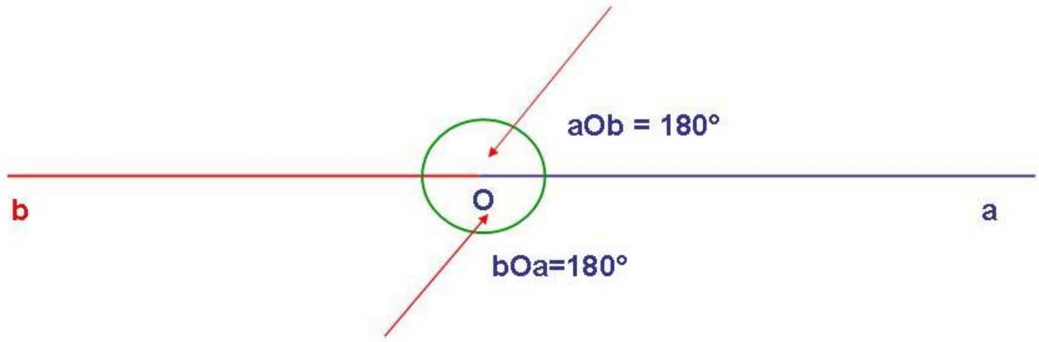


Un angolo $a\widehat{O}b$ è detto **concavo** quando al suo interno contiene il prolungamento dei suoi lati

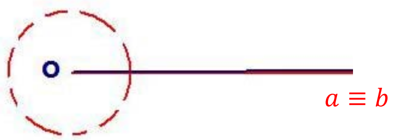


Angoli particolari

Si definisce **angolo piatto** quell' angolo determinato da due semirette che siano una il prolungamento dell' altra.



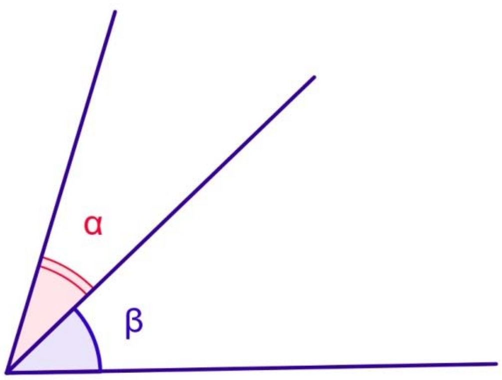
Si definisce **angolo giro** quell' angolo determinato da due lati coincidenti e che coincide con l' intero piano.



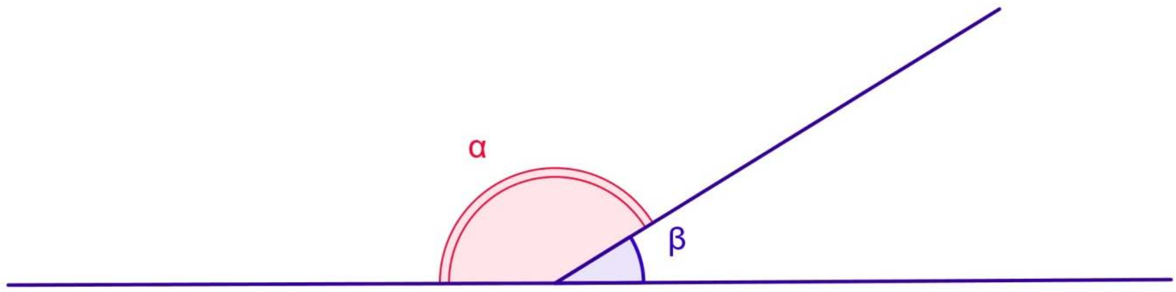
Si definisce **angolo nullo** quell' angolo determinato da due lati coincidenti e che non contiene altri punti a parte quelli dei suoi lati

Angoli Adiacenti e consecutivi

Due angoli aventi un vertice e un lato in comune si dicono **consecutivi**.



Due angoli consecutivi aventi gli altri due lati uno sul prolungamento dell' altro si dicono **adiacenti**.



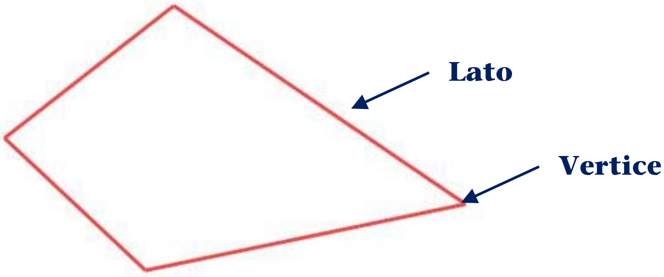
Poligoni

Osserva queste immagini

Le celle costruite dalle api e le facce di un diamante hanno una forma regolare. Le celle dell' alveare e le facce del diamante sono dette poligoni.

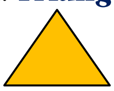
Definizione

Si definisce **poligono** la figura formata da una poligonale (spezzata chiusa e non intrecciata) e dai suoi punti interni, cioè dalla parte di piano da essa delimitata.

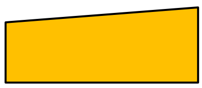


Il numero dei lati e degli angoli di un poligono coincidono e danno il nome al poligono**:**

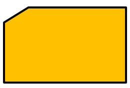
Tre lati: **Triangolo**



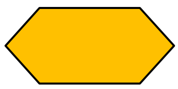
Quattro lati: **Quadrilatero** o **Quadrangolo**



Cinque lati: **Pentagono**



Sei lati: **Esagono**

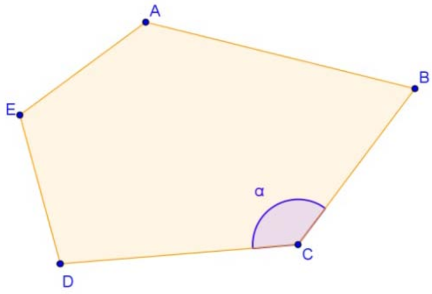


- **..................**

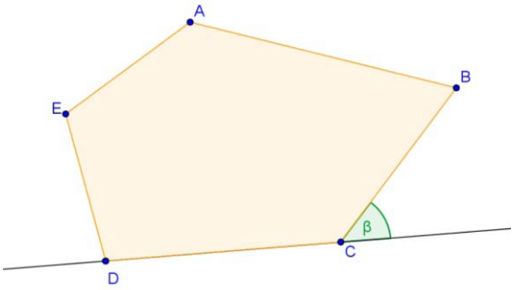
In generale si parla di ***poligono di n lati***. Esistono due segmenti particolari interni ad un poligono sono:

A. La **corda**
B. La **diagonale**

Angolo interno ed esterno di un poligono



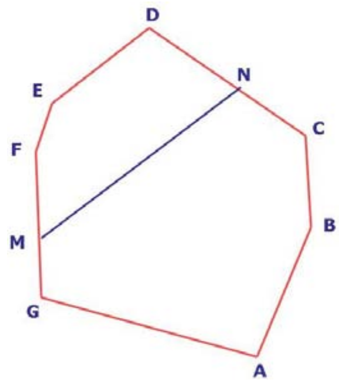
Un angolo interno di un poligono è ogni angolo individuato da due lati consecutivi e dal vertice in comune



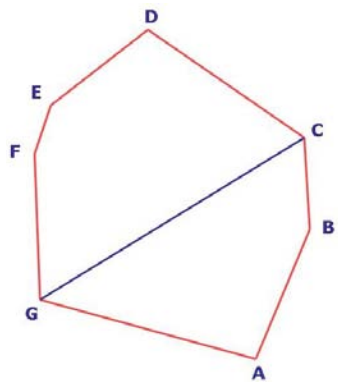
Un **angolo esterno** di un poligono è ogni angolo adiacente ad un angolo interno

Definizioni

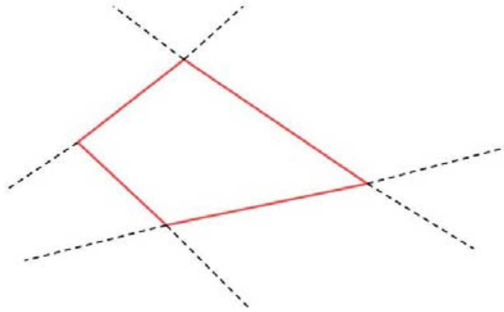
Il segmento congiungente due punti appartenenti a due lati non consecutivi di un poligono si definisce **corda** del poligono



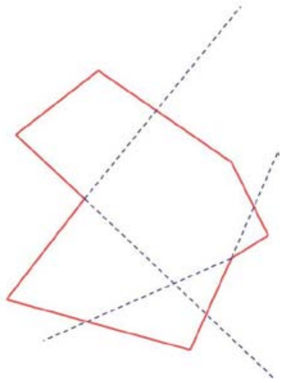
Il segmento che congiunge due vertici non consecutivi di un poligono si chiama **diagonale** del poligono



Si definisce **Poligono Convesso** il poligono che giace, rispetto a ciascuna retta sostegno del lato, tutta dalla stessa parte.



Si definisce **Poligono Concavo** , il poligono avente un prolungamento di un suo lato che lo divide in due parti. Inoltre l' angolo interno formato dai due lati consecutivi considerati è concavo.



Un poligono può essere equilatero, equiangolo o regolare

Si definisce **poligono equilatero** un poligono aventi tutti i lati uguali

Si definisce **poligono equiangolo** un poligono aventi tutti gli angoli uguali.

Si definisce **poligono regolare** un poligono equilatero ed equiangolo

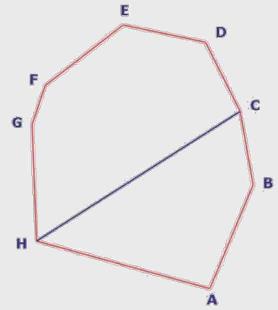
Verifica se hai compreso

Completa le seguenti frasi

A. Un triangolo è un .... convesso, composto da tre

.... e da tre angoli ....

B. Un ottagono è un .... composto da .... lati.



C. Il segmento HC è una .... dell' ottagono.

HAI IMPARATO CHE …

1. Il punto, la retta e il piano sono enti primitivi
2. Si definisce figura geometrica un qualunque insieme di punti non vuoto
3. Il significato geometrico di semiretta e di segmento.
4. Il significato geometrico di poligonale
5. Il significato geometrico di semipiano
6. IL significato geometrico di angolo.
7. Gli angoli convessi non contengono il prolungamento dei loro lati
8. Gli angoli concavi contengono, al loro interno, il prolungamento dei loro lati.
9. Il poligono può essere: convesso o concavo . Si ottiene considerando una poligonale e la parte di piano che la delimita.
10. Il nome dei poligoni dipende dal numero dei lati.
11. Un poligono può essere: equilatero, equiangolo, equilatero ed equiangolo, ed è detto in questo caso regolare

LA CONGRUENZA

PREREQUISITI
Saper riconoscere le figure geometriche piane;
Conoscere le definizioni delle figure geometriche
Conoscere segmenti, angoli

OBIETTIVI

Sapere
Conoscere la congruenza tra figure
Conoscere la congruenza tra segmenti
Conoscere la congruenza tra angoli
Conoscere la congruenza tra triangoli
Conoscere la disuguaglianza triangolare

Saper Fare
Saper operare con segmenti e angoli
Saper enunciare e dimostrare la congruenza tra triangoli
Saper enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare
Saper dimostrare teoremi utilizzando i criteri di congruenza tra triangoli

Introduzione alla congruenza

Che differenza esiste tra le seguenti affermazioni.
" La figure geometriche F e F' sono uguali"
" Le figure geometriche F e F' sono congruent

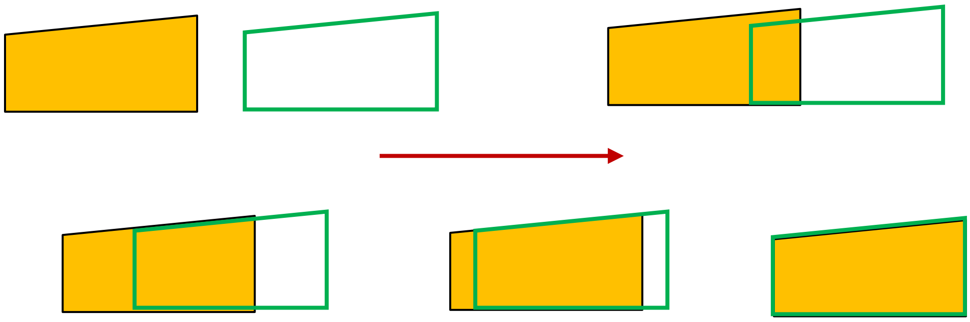
Consideriamo due insiemi A e B, essi sono uguali se sono composti dagli stessi elementi. Per analogia possiamo affermare che due figure geometriche (insiemi) sono uguali se sono composte dagli stessi punti (elementi).

Due figure geometriche per essere composte dallo stesso insieme di punti devono occupare la stessa parte di piano quindi, devono coincidere.

Esempio

Consideriamo i seguenti poligoni P e P'.

P e P' non sono uguali perché non sono composti dallo stesso insieme di punti.
Applichiamo a P un movimento rigido, cioè muoviamo orizzontalmente secondo il verso indicato P, finché ogni suo lato non si sovrappone con quello di P'.



Possiamo dire che, una volta sovrapposte P e P' sono uguali perché occupano la stessa parte di piano ma, inizialmente sono congruenti e si indica $P \cong P'$

Definizione

Due figure F e F' si dicono **congruenti** quando, tramite un movimento rigido, è possibile trasportare la figura F sulla F' in modo che coincidano.

La congruenza tra figure gode delle seguenti proprietà:

1. **Proprietà riflessiva**
   Ogni figura F è congruente a se stessa $F \cong F'$

2. **Proprietà Simmetrica**
   Se una figura F è congruente alla figura G allora anche G sarà congruente ad F
   $$F \cong G \Longrightarrow G \cong F$$
3. **Proprietà Transitiva**
   Se una figura F è congruente ad una figura G e G è congruente a P, allora la figura F è congruente alla figura P.
   $$(F \cong G \wedge G \cong P) \Longrightarrow F \cong P$$

La congruenza e i segmenti

Tramite la congruenza tra figure possiamo:

- Confrontare tra loro segmenti
- Sommare o sottrarre tra loro segmenti
- Introdurre il concetto di multiplo o sottomultiplo di un segmento
- Introdurre il concetto di lunghezza di un segmento

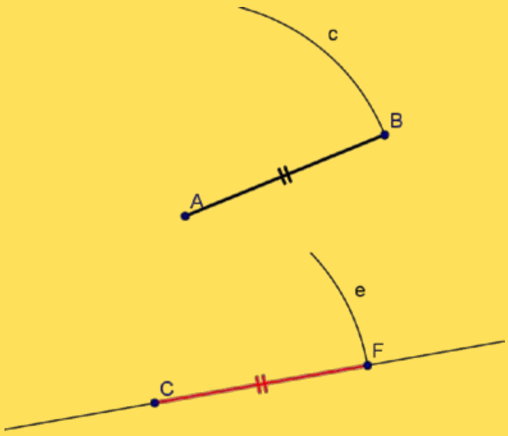
Costruzione con riga e compasso

La costruzione con riga e compasso permette di risolvere problemi geometrici tramite l' utilizzo di due strumenti: riga e compasso.
Tramite questi due strumenti puoi effettuare le seguenti operazioni:

- *Tracciare rette passanti per due punti*
- *Determinare il punto di intersezione tra rette*
- *Tracciare una circonferenza o un arco di circonferenza*
- *Determinare i punti di intersezione tra due circonferenze o tra una retta e una circonferenza.*

Problema
Trasportare un segmento AB sopra una semiretta t di origine O.

Puntiamo in A il compasso con apertura uguale al segmento AB.
Puntiamo il compasso in un punto C della retta t e disegniamo un arco di circonferenza. Tale arco interseca la retta in un punto F. Il segmento CF è congruente al segmento AB.
Tale costruzione è nota anche come ***Trasporto di un segmento sopra una retta.***

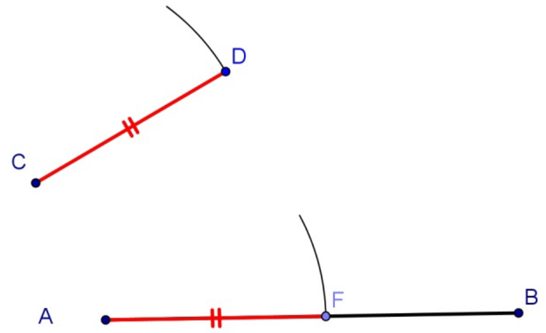


Confronto tra segmenti

I segmenti possono essere confrontati tra loro e si possono verificare i seguenti casi.

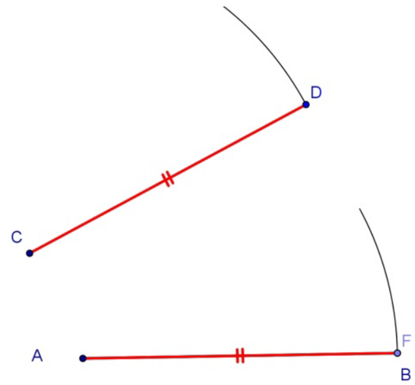
I caso)

Dati due segmenti AB e CD, trasportiamo CD su AB. se C coincide con A ($A \equiv C$) e $D \equiv F$ è compreso tra gli estremi A e B del segmento AB, si può dedurre che il segmento ***CD* è minore di *AB*** e si scrive $\boldsymbol{CD} < AB$;



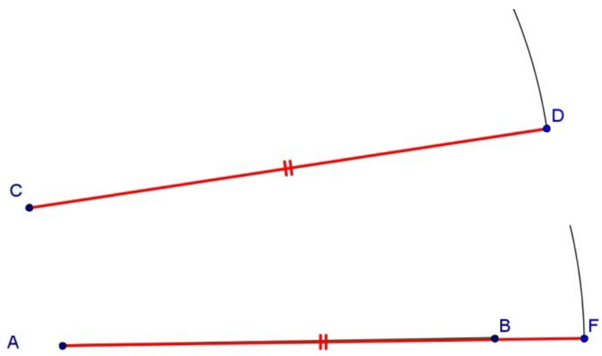
II caso)

Dati due segmenti AB e CD, trasportiamo CD su AB. se C coincide con A ($A \equiv C$) e $D \equiv B$, si può dedurre che il segmento ***CD* è congruente ad *AB*** e si scrive $\boldsymbol{CD} \cong \boldsymbol{AB}$;



III caso)

Dati due segmenti AB e CD, trasportiamo CD su AB. se C coincide con A ($A \equiv C$) e $D \equiv F$ cade sul prolungamento del segmento AB, dalla parte di B,si può dedurre che il segmento ***CD* è maggiore di *AB*** e si scrive $\boldsymbol{CD} > AB$;



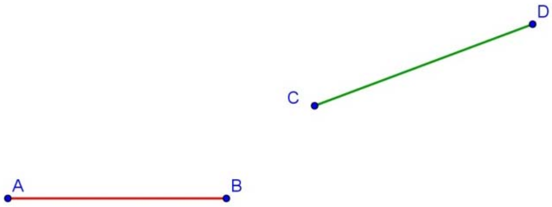
Somma di segmenti

Consideriamo due segmenti adiacenti AB e BC

La loro somma da' il segmento AC, avente per estremi A e C non comuni ai due segmenti AB e BC.

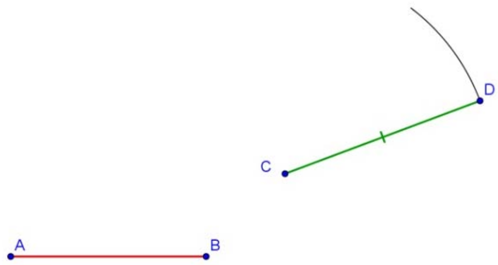
$$AB + BC = AC$$

Consideriamo adesso, due segmenti non adiacenti AB e AC e calcoliamo la loro somma.



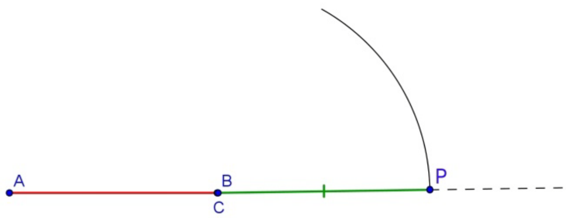
Puntiamo il compasso in C e prendiamo come ampiezza CD. (Utilizziamo la costruzione con riga e compasso)

Prolunghiamo il segmento AB dalla parte di B.



Puntiamo il compasso in B e disegniamo l' arco della circonferenza di raggio CD che incontra in P il prolungamento di AB.
Il segmento CP è congruente al segmento CD per costruzione $CP \cong CD$. Possiamo concludere che

$$AB + CD = AP$$



Definizione

Dati due segmenti si definisce **segmento somma** il segmento ottenuto dalla somma di due segmenti congruenti a quelli dati e adiacenti.

Definizione

Dati due segmenti AB e CD con $AB > CD$ si definisce **segmento differenza** il segmento che sommato a CD dia AB.

La differenza di due segmenti congruenti è il segmento nullo.

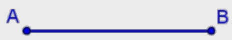
Multipli di un segmento

Sappiamo che un numero a è multiplo di un numero b secondo un numero naturale n se, a è uguale alla somma di n volte b.
Applichiamo la medesima definizione ai segmenti e otteniamo:

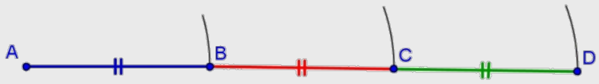
Definizione

Un segmento AB si dice **multiplo** di un segmento CD secondo il numero n, con n>1, se è congruente alla somma di n segmenti congruenti a CD e si indica $\boldsymbol{AB \cong n \cdot CD}$
Se AB è multiplo di CD secondo n si può affermare che CD è **sottomultiplo** di AB secondo $\frac{1}{n}$, $\boldsymbol{CD \cong \frac{1}{n} \cdot AB}$.

Mettiti alla prova

Dato il segmento AB  disegna il segmento AD triplo di AB.

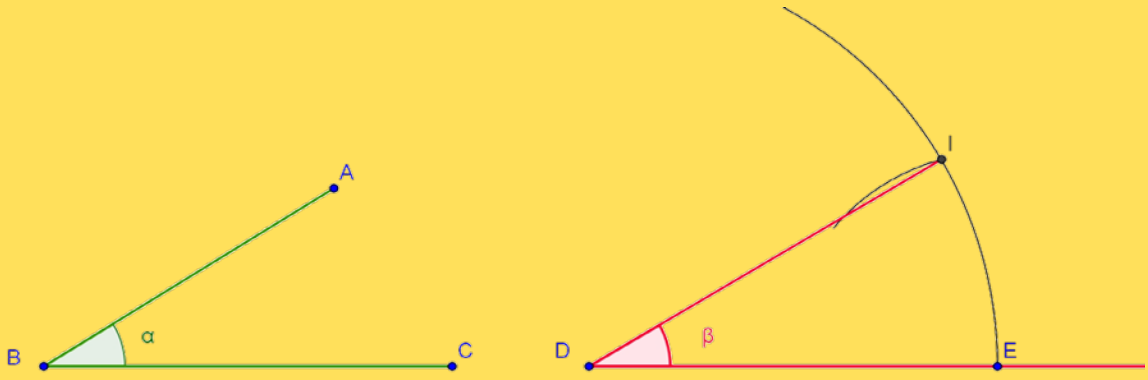
Trasportiamo sul prolungamento di AB, dalla parte di B il segmento AB, puntando il compasso in B. Otteniamo il segmento BC adiacente ad AB e ad esso congruente.
Trasportiamo il segmento AB puntando il compasso in C e otteniamo il segmento CD, adiacente a BC e congruente ad AB.
Il segmento AD è il triplo di AB. $AD \cong 3AB$



La congruenza e gli angoli

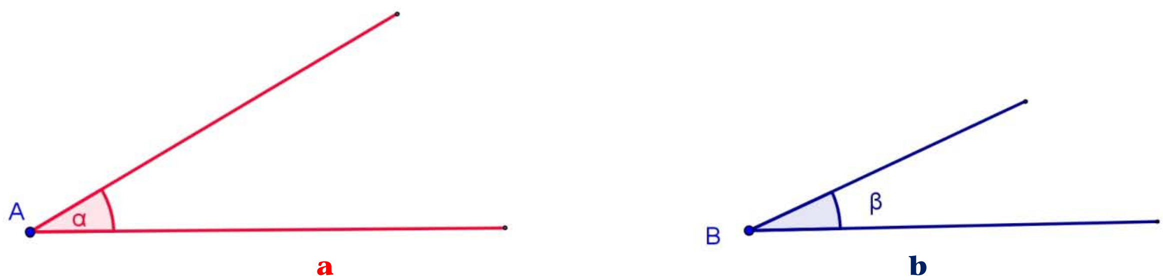
Costruzione con riga e compasso angolo congruente ad un angolo dato

Consideriamo l' angolo CBA. Disegniamo una semiretta di origine D. Poniamo il compasso in D con apertura BC, disegniamo l' arco di circonferenza che interseca in E la semiretta.
Poniamo il compasso con centro in E e apertura AC, disegniamo l' arco di circonferenza che intersecherà l' arco precedente in I. Congiungiamo I con D e otteniamo l' angolo EDI congruente all' angolo CBA.



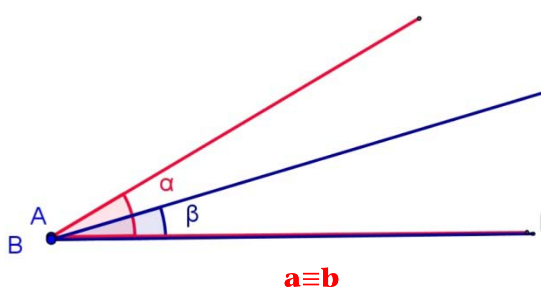
Confronto tra angoli

Gli angoli possono essere confrontati tra loro. Dati due angoli α e β, possiamo avere i seguenti casi



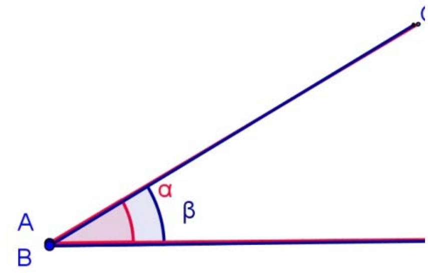
I caso)

Trasportiamo in A il vertice B e facciamo coincidere il lato **b** con il lato a, se il secondo lato dell' angolo β cade internamente all' angolo α, si può dedurre che l' angolo β **è minore di** α e si scrive $\boldsymbol{\beta} < \alpha$;



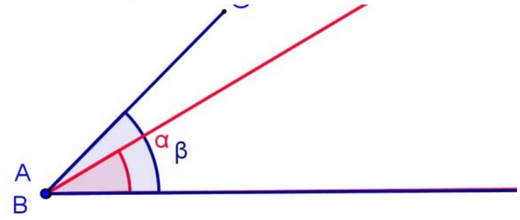
II caso)

Trasportiamo in A il vertice B e facciamo coincidere il lato b con il lato a, se il secondo lato dell' angolo β coincide con il secondo lato dell' angolo α, si può dedurre che l' angolo β **è congruente di** α e si scrive $\boldsymbol{\beta \cong \alpha}$;



III caso)

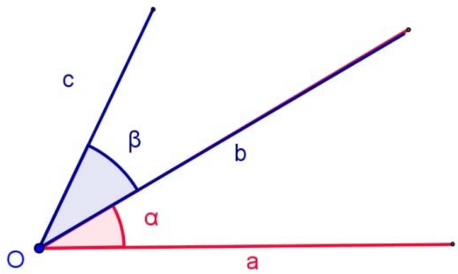
Trasportiamo in A il vertice B e facciamo coincidere il lato b con il lato a, se il secondo lato dell' angolo β cade esternamente all' angolo α, si può dedurre che l' angolo β **è maggiore di** α e si scrive $\boldsymbol{\beta} > \alpha$;



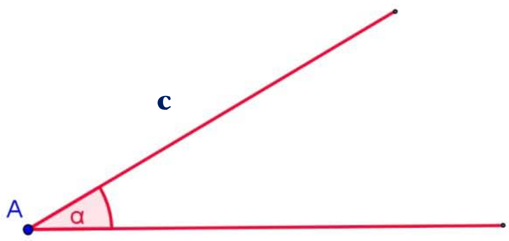
Somma di angoli

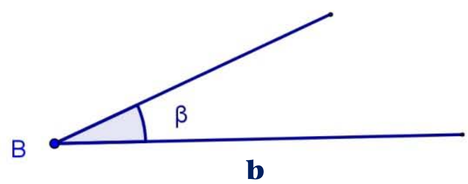
Definizione

Dati due angoli consecutivi $\widehat{aob}$ e $\widehat{boc}$, la loro **somma** da' un angolo avente come lati i due lati non comuni, cioè l' angolo $\widehat{aoc}$



Consideriamo adesso, due angoli non consecutivi e calcoliamo la loro somma.

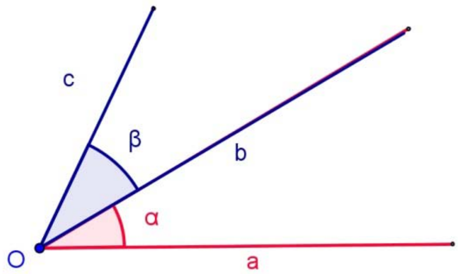




Utilizziamo la costruzione con riga e compasso e trasportiamo l' angolo β in modo che α e β siano consecutivi. Facciamo coincidere il lato b dell' angolo β con il lato c dell' angolo α .

L' angolo $\widehat{aoc}$ è uguale alla somma dell' angolo $\widehat{aob}$ e $\widehat{boc}$

$$\widehat{aob} + \widehat{boc} = \widehat{aoc}$$



Definizione

Dati due angoli α e β si definisce **angolo somma** l' angolo ottenuto dalla somma di due angoli congruenti a quelli dati e consecutivi.

Definizione

Dati due angoli α e β con $\alpha > \beta$ si definisce **angolo differenza** l' angolo che sommato a β da α.

La differenza di due angoli congruenti è l' angolo nullo.

Somma o differenza di angoli congruenti sono congruenti

$$\boldsymbol{\alpha \cong \beta \wedge \gamma \cong \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma \cong \beta + \delta}$$

Multipli di un angolo

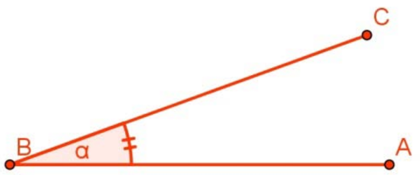
Definizione

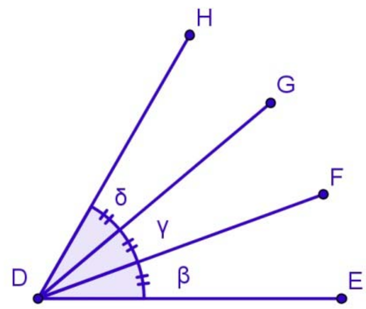
Un angolo α si dice **multiplo** di un angolo β secondo il numero n, con n>1, se è congruente alla somma di n angoli congruenti a β e si indica $\boldsymbol{\alpha \cong n \cdot \beta}$

Se α è multiplo di β secondo n si può affermare che β è **sottomultiplo** di α secondo $\frac{1}{n}$, $\boldsymbol{\beta \cong \frac{1}{n} \cdot \alpha}$.

Esempio

L' angolo $\widehat{EDH}$ è multiplo secondo 3 dell' angolo $\widehat{ABC}$ cioè, $\widehat{EDH}$ è triplo di ABC.

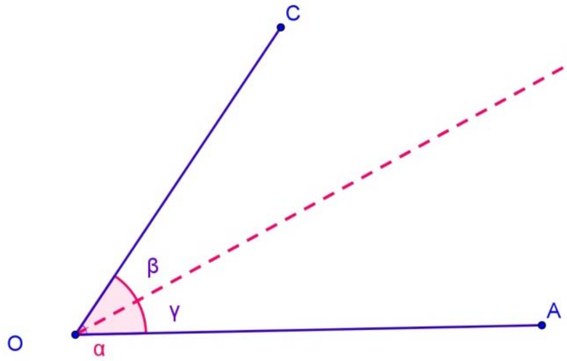




Bisettrice di un angolo

Definizione

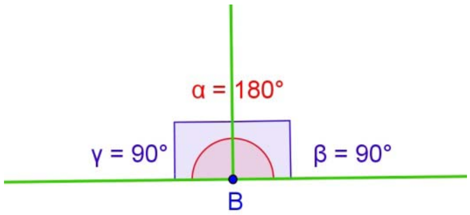
Si chiama **bisettrice** di un angolo di vertice O la semiretta uscente da O, interno all' angolo, che lo divide in due angoli congruenti.



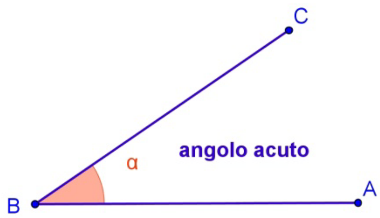
Angoli particolari

Definizioni

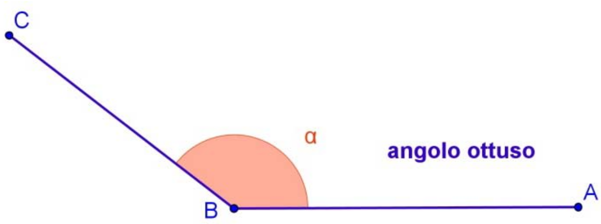
Dato un angolo piatto la bisettrice lo divide in due angoli congruenti detti **angoli retti.**



Un angolo si definisce **acuto** se è minore di un angolo retto.



Un angolo si definisce **ottuso** se è maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto.



Particolari somme di angoli

Due angoli α e β la cui somma da' un angolo **retto** si dicono **complementari**.

Due angoli α e β la cui somma da' un angolo **piatto** si dicono **supplementari**.

Due angoli α e β la cui somma da' un angolo **giro** si dicono **esplementari**.

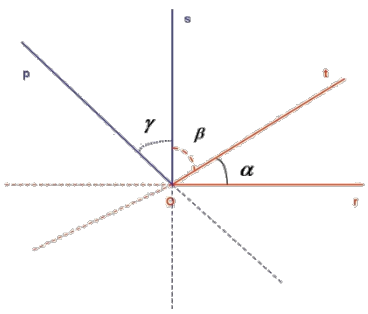
Iniziamo adesso a dimostrare i primi teoremi.

Teorema 2.1
Angoli complementari di uno stesso angolo sono congruenti.

Dopo aver letto attentamente l' enunciato distinguiamo l' ipotesi dalla tesi.
Sappiamo che
Ip: $\alpha + \beta = 90° \wedge \gamma + \beta = 90°$
Dobbiamo dimostrare che:
Ts: $\alpha \cong \gamma$

Dimostrazione

Consideriamo l' angolo α e l' angolo β.
Sappiamo che:
$\alpha + \beta = 90°$ quindi $\boldsymbol{\alpha = 90° - \beta}$ per definizione di differenza tra angoli.
Consideriamo l' angolo β e l' angolo γ.
Sappiamo che:
$\gamma + \beta = 90°$ quindi $\boldsymbol{\gamma = 90° - \beta}$ per definizione di differenza tra angoli.

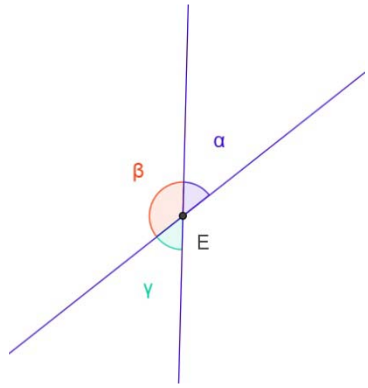


Per la proprietà che afferma:" *Differenza di angoli congruenti sono congruenti*" possiamo dedurre che $\boldsymbol{\alpha \cong \gamma}$

Teorema 2.2
Angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti.

Dopo aver letto attentamente l' enunciato distinguiamo l' ipotesi dalla tesi.
Sappiamo che
Ip: $\alpha + \beta = 180° \ \wedge \gamma + \beta = 180°$
Dobbiamo dimostrare che:
Ts: $\alpha \cong \gamma$

Dimostrazione



Consideriamo l' angolo α e l' angolo β.
Sappiamo che:
$\alpha + \beta = 180°$ quindi $\boldsymbol{\alpha = 180° - \beta}$ per definizione di differenza tra angoli.
Consideriamo l' angolo β e l' angolo γ.
Sappiamo che:
$\gamma + \beta = 180°$ quindi $\boldsymbol{\gamma = 180° - \beta}$ per definizione di differenza tra angoli.

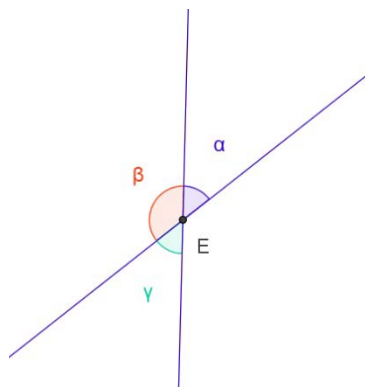
Per la proprietà che afferma:" *Differenza di angoli congruenti sono congruenti*" possiamo dedurre che $\boldsymbol{\alpha \cong \gamma}$

Mettiti alla prova e dimostra il seguente teorema.

Teorema 2.3
Angoli esplementari di uno stesso angolo sono congruenti

Teorema 2.4
Angoli opposti al vertice sono congruenti
Sappiamo che
Ip: $\alpha \ \wedge \gamma$ sono opposti al vertice
Dobbiamo dimostrare che:
Ts: $\alpha \cong \gamma$

Dimostrazione



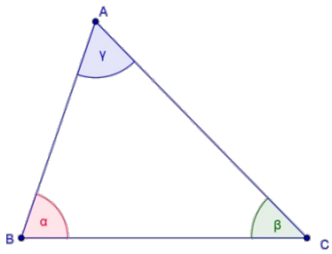
Consideriamo l' angolo α e l' angolo β .
Notiamo che α e β sono adiacenti e quindi supplementari
$\alpha + \beta = 180°$
Notiamo che γ e β sono adiacenti e quindi supplementari
$\gamma + \beta = 180°$
Per il teorema precedentemente dimostrato che afferma:" *Angoli supplementari di uno stesso angolo sono congruenti*" possiamo dedurre che $\boldsymbol{\alpha \cong \gamma}$

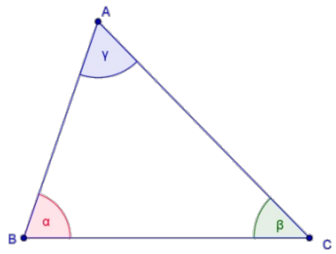
La congruenza e i triangoli

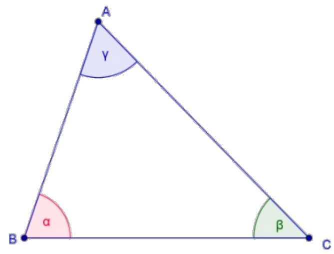
Il triangolo

Si definisce **triangolo** , un poligono composto da tre lati.

Terminologia

<table>
<tr>
<td>Ogni lato del triangolo è opposto all’ angolo il cui vertice non appartiene al lato e adiacente agli altri due angoli.</td>
<td>Un angolo è opposto al lato che non lo contiene, ed è adiacente agli altri due lati.</td>
<td>Un angolo si dice compreso tra due lati di un triangolo se essi appartengono ai lati dell’ angolo</td>
</tr>
<tr>
<td>

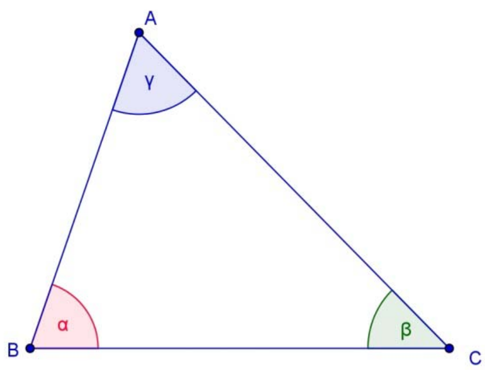
Il lato AB è:
opposto all’ angolo β;
adiacente agli angoli α e γ</td>
<td>

L’ angolo α è:
opposto al lato AC
adiacente ai lati AB e BC.</td>
<td>

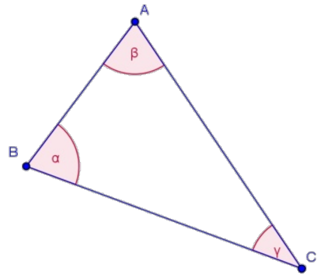
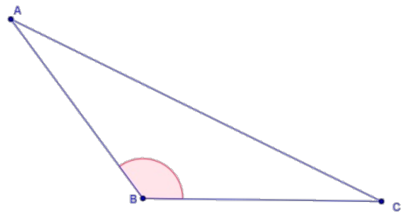
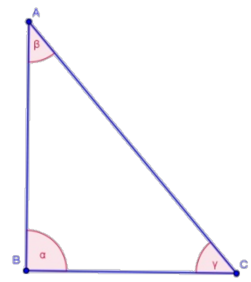
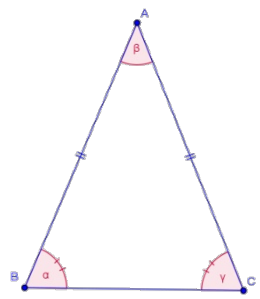
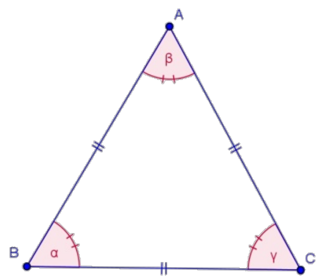
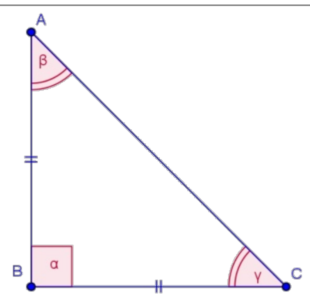
L’ angolo α è compreso tra i lati BC e AB.</td>
</tr>
</table>

Triangoli **scaleni**

Un triangolo si definisce **scaleno** quando ha tutti e tre i lati disuguali



Classificazione dei triangoli in base alle proprietà dei loro lati o dei loro angoli

Triangoli **acutangoli**	Un triangolo è **acutangolo** quando tutti è tre gli angoli sono acuti, ossia minori di un angolo retto.	
Triangoli **ottusangoli**	Un triangolo è **ottusangolo** quando uno dei suoi angoli interni è maggiore dell' angolo retto e minore dell' angolo piatto, ossia **ottuso**.	
Triangoli **rettangoli**	Un triangolo è **rettangolo** quando uno dei tre angoli è retto, ha cioè i lati perpendicolari I lati perpendicolari tra loro vengono chiamati **cateti**. Il lato opposto all' angolo retto è detto **ipotenusa.**	
Triangoli **isosceli**	Un triangolo è **isoscele** quando ha due lati congruenti, l' altro lato viene detto **base** del triangolo.	
Triangoli **equilateri**	Un triangolo è **equilatero** quando ha tutti e tre i lati congruenti. Tale triangolo è detto anche **equiangolo**, in quanto si può dimostrare che anche i tre angoli sono congruenti	
Triangoli **rettangoli isosceli**	Un triangolo **rettangolo** è **isoscele** quando ha i due cateti congruenti	

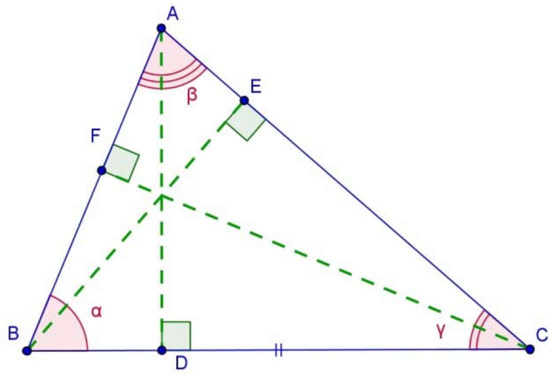
Segmenti notevoli di un triangolo

In un triangolo esistono dei segmenti particolari, questi sono :

Altezza

Si definisce **altezza** di un triangolo il segmento uscente da un vertice e perpendicolare al lato opposto.

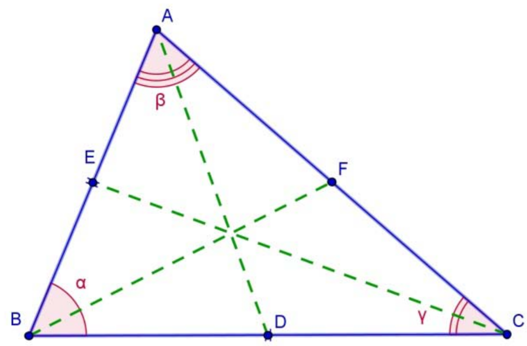
Le altezze si incontrano in un punto detto **Ortocentro**



Mediana

Si definisce **mediana** il segmento congiungente un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

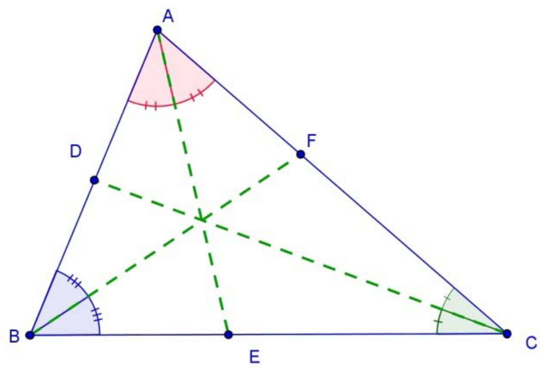
Le mediane si incontrano in un punto detto **Baricentro**



Bisettrice

Si definisce **bisettrice di un angolo di un triangolo** il segmento uscente dal vertice di un angolo,che lo divide in due parti congruenti, e incontra il lato opposto in un punto.

Le bisettrici dei tre angoli interni si incontrano in un punto detto **Incentro**



Verifica se hai compreso

1. Completa le seguenti frasi

A. Un triangolo avente un angolo ottuso è detto ....

Un angolo è ottuso quando è .... di un angolo retto e minore di un angolo ....

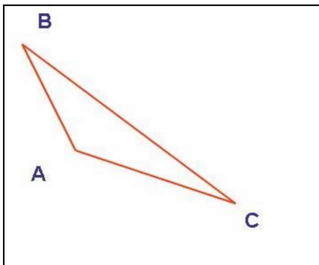
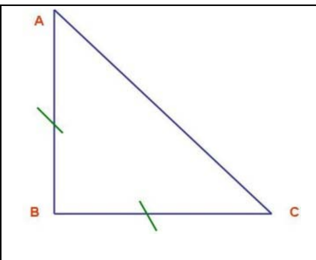
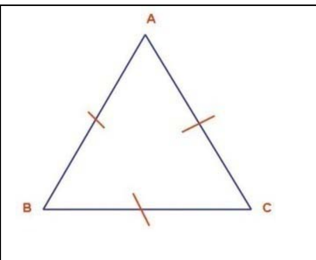
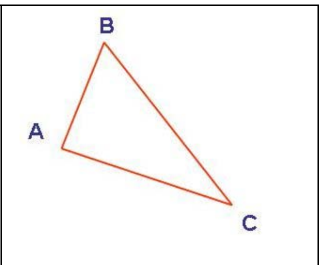
B. La mediana in un triangolo è un ....uscente da un .... che cade nel punto .... del lato opposto. Le mediane di un triangolo si incontrano in un punto detto ....

C. L' altezza in un triangolo è un .... uscente da un .... e .... al lato opposto.

Le altezze di un triangolo si incontrano in un punto detto ....

D. La bisettrice degli angoli interni di un triangolo è un .... uscente da un .... che divide l' angolo in due parti .... e incontra il lato opposto. Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un punto detto ....

2. Assegna ad ogni immagine la propria definizione

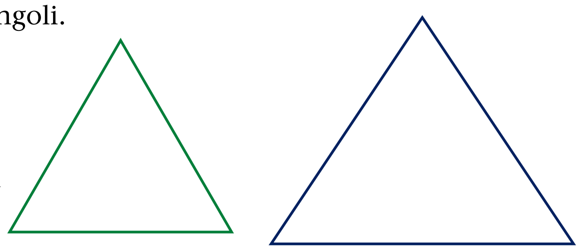
			

I criteri di congruenza dei triangoli

Riprendendo la definizione di congruenza e applicandola ai triangoli possiamo affermare che:

> Due triangoli sono **congruenti** quando hanno ordinatamente congruenti i lati e gli angoli ad essi corrispondenti
>
> Si chiamano **corrispondenti** gli angoli opposti ai lati congruenti o i lati opposti agli angoli congruenti.

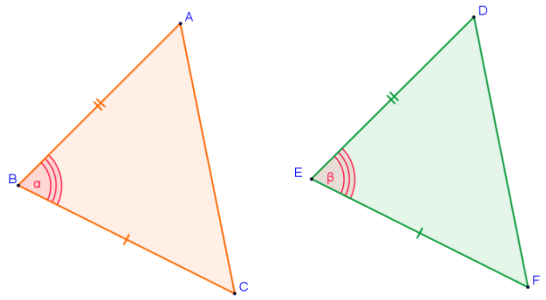
Per verificare se due triangoli sono congruenti è sufficiente verificare se hanno almeno tre coppie di elementi congruenti, ad esclusione delle tre coppie di angoli.
Osserva i due triangoli equilateri a lato.
Hanno gli angoli congruenti, ma i lati sono disuguali.
I due triangoli non sono congruenti.



Per poter dimostrare che due triangoli sono congruenti si può utilizzare uno dei tre criteri di congruenza che adesso dimostreremo.

I Criterio di congruenza

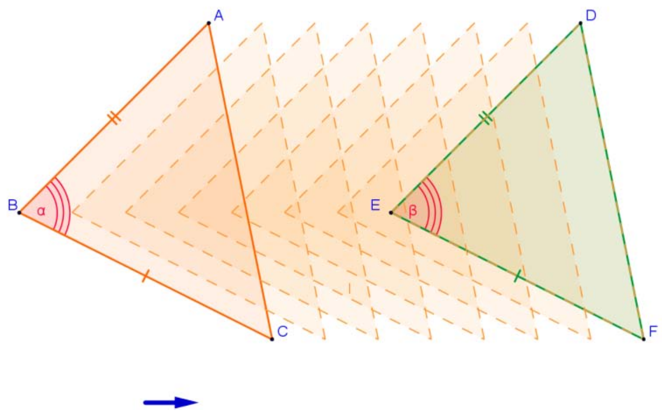
Due triangoli ABC e DEF aventi ordinatamente congruenti due lati e l' angolo tra essi compreso sono congruenti.
Sappiamo che



Ip:
$AB \cong ED$
$BC \cong EF$
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$
Ts:
$ABC \cong DEF$

Dimostrazione

Muoviamo il triangolo ABC in modo che il vertice B coincida con il vertice E, osserviamo che:



- il lato AB coincide con il lato ED essendo per ipotesi congruenti, quindi il vertice A coincide con il vertice D;
- il lato BC coincide con il lato EF, essendo per ipotesi congruenti, quindi il vertice C coincide con il vertice F;
- L' angolo $\widehat{ABC}$ coincide con l' angolo $\widehat{DEF}$, perché congruenti per ipotesi.

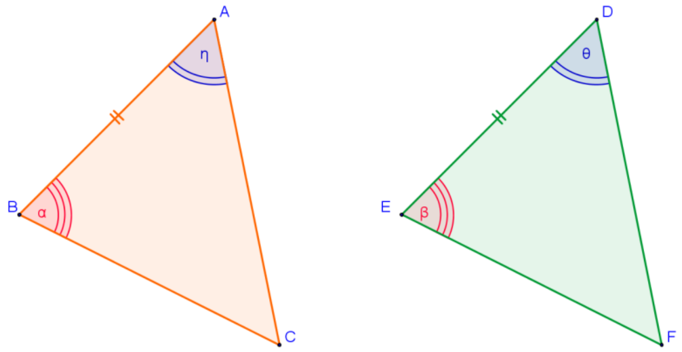
Siccome il vertice A coincide con D e il vertice C coincide con F, il lato AC coincide con DF, quindi $AC \cong DF$. Con il medesimo ragionamento si può dedurre che $\widehat{CAB} \cong \widehat{FDE} \wedge \widehat{BCA} \cong \widehat{EFD}$.
Possiamo concludere che i due triangoli sono congruenti.

II Criterio di congruenza

Due triangoli ABC e DEF aventi ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, sono congruenti.

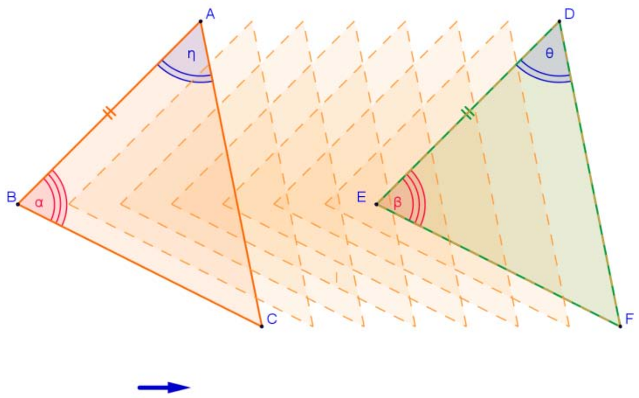
Sappiamo che

Ip:
$AB \cong ED$
$\widehat{CAB} \cong \widehat{FDE}$
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$
Ts:
$ABC \cong DEF$



Dimostrazione

Con ragionamento analogo al criterio precedente, sovrapponendo i due triangoli si dimostra che i due triangoli sono congruenti.



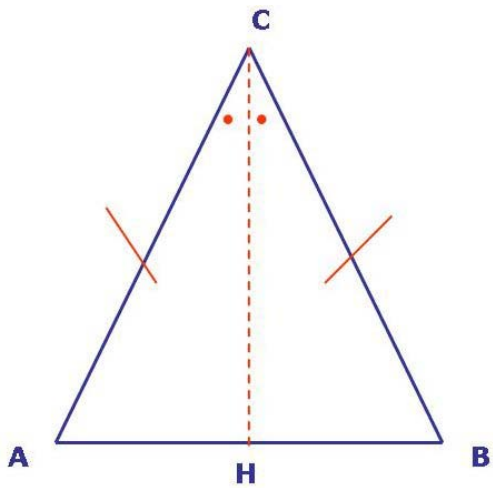
Il triangolo isoscele e le sue proprietà

Possiamo dimostrare, utilizzando i criteri di congruenza dei triangoli, alcune proprietà del triangolo isoscele.
In un triangolo isoscele i due lati congruenti sono i lati obliqui e il terzo lato si chiama **base** del triangolo e i due angoli adiacenti alla base si dicono **angoli alla base** e il terzo angolo, **angolo al vertice**.
Quando si parla di un triangolo isoscele bisogna sempre specificare qual è la base.

Dimostriamo insieme il seguente teorema

Teorema 2.5

" Un triangolo avente due lati congruenti ha anche gli angoli alla base congruenti"



Ip:
....
Ts:
$\widehat{BAC} \cong \widehat{CBA}$

Un triangolo ABC ha i lati CA e CB congruenti, è
....

Costruisci la bisettrice dell' angolo al vertice C. La bisettrice divide l' angolo ACB in due angoli

....

Hai ottenuto due .... AHC e HBC.

I due triangoli hanno: ....
CH in comune
$AC \cong BC$ per ipotesi
$\widehat{HCA} \cong \widehat{HCB}$ per costruzione

Puoi dedurre che il triangolo AHC è .... al triangolo HBC , per il

.... criterio di congruenza.

Dalla congruenza dei due triangoli puoi affermare che:

- l' angolo $\widehat{CAH}$ è .... all' angolo $\widehat{HBC}$;
- l' angolo $\widehat{AHC} \cong \widehat{CHB}$
- $AH \cong HB$

Considerando il triangolo ABC puoi dedurre che:
" Un triangolo avente due lati congruenti ha anche gli angoli alla base congruenti"

Dalla dimostrazione precedente abbiamo ottenuto che:
- l' angolo $\widehat{AHC} \cong \widehat{CHB}$, ma tali angoli sono supplementari quindi sono retti
- $AH \cong HB$, H è punto medio della base AB

Possiamo quindi riassumere queste deduzioni in un teorema

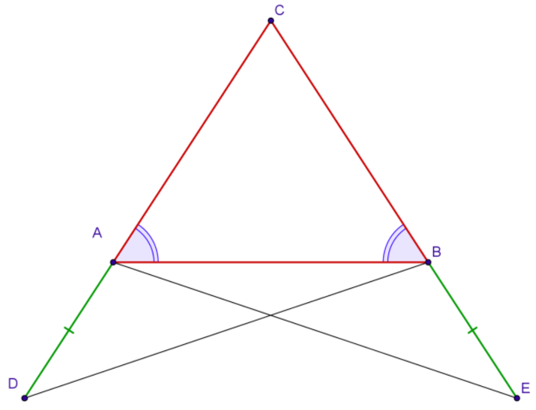
Teorema 2.6

In un triangolo isoscele la bisettrice dell' angolo al vertice è anche mediana ed altezza relativa alla base.

Teorema 2.7

" Un triangolo avente due angoli congruenti ha anche i lati corrispondenti congruenti"

Ip:
$\widehat{BAC} \cong \widehat{CBA}$
Ts:
$AC \cong BC$
Dimostrazione
Consideriamo il triangolo ABC avente gli angoli alla base congruenti.



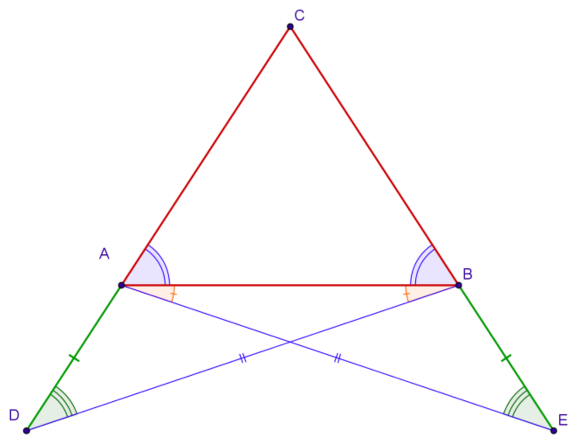
$\widehat{BAC} \cong \widehat{CBA}$
Prolunghiamo i la AC e BC dalla parte di A e di B e prendiamo due segmenti congruenti AD e BE.
Consideriamo i due triangoli ADB e ABE. Essi hanno:

$\widehat{BAD} \cong \widehat{EBA}$ perché angoli supplementari di angoli congruenti

AB in comune

$AD \cong BE$ per costruzione
Conseguentemente i due triangoli sono congruenti e avranno
$\widehat{ADB} \cong \widehat{AEB}$ e $DB \cong AE$ e $\widehat{DBA} \cong \widehat{BAE}$

Consideriamo i due triangoli CDB e CAE. Essi hanno:
$DB \cong AE$ per dimostrazione precedente
$\widehat{CAE} \cong \widehat{CBE}$ perché somma di angoli congruenti.
$\widehat{ADB} \cong \widehat{AEB}$ per dimostrazione precedente
Per il II criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti e hanno $AC \cong BC$
Considerando il triangolo ABC puoi dedurre che:
" Un triangolo avente due angoli congruenti ha anche i lati congruenti, cioè è isoscele"



I due teoremi dimostrati sui triangoli isosceli possiamo riassumerli in uno solo:

Teorema 2.8

Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia isoscele è che abbia gli angoli alla base congruenti.

Il triangolo equilatero lo possiamo considerare come un particolare triangolo isoscele su due basi diverse. Dalla condizione necessaria e sufficiente dimostrata per il triangolo isoscele possiamo dedurre il seguente teorema (lasciamo al lettore la dimostrazione).

Teorema 2.9

Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia equilatero è che abbia tutti e tre gli angoli congruenti.

Condizione necessaria e sufficiente

Condizione necessaria

Affinché un "fatto" si verifichi è necessario che si verifichi una "condizione".
Esempio
Quest' anno farò gli esami di stato se avrò tutte le materie sufficienti.
Avere tutte le materie sufficienti è condizione necessaria per essere ammessi all' esame.

Condizione sufficiente
Affinché un "fatto" si verifichi è sufficiente che si verifichi una "condizione".

Esempio
Quest' estate sono stato ai Caraibi.
L' essere stato ai Caraibi è sufficiente per affermare che Luca è stato al mare.

Una condizione necessaria non è detto che sia sufficiente e, una condizione sufficiente non è detto che sia necessaria.
Infatti " se sono stato al mare" non è detto che sia stato ai Caraibi.

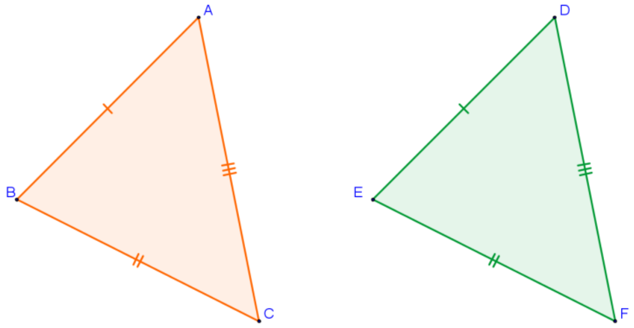
Se si verificano entrambe le condizioni allora si parla di condizione necessaria e sufficiente.

III Criterio di congruenza

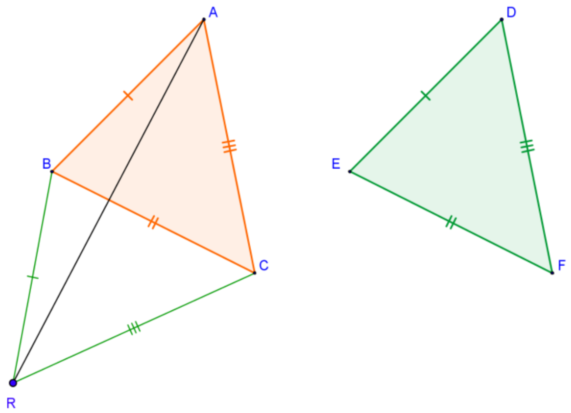
Due triangoli ABC e DEF aventi ordinatamente congruenti tutti e tre i lati, sono congruenti.

Sappiamo che

Ip:
$AB \cong ED$
$BC \cong EF$
$AC \cong DF$
Ts:
$ABC \cong DEF$



Dimostrazione
Dalla parte opposta di A trasportiamo il triangolo DEF, utilizzando la costruzione riga e compasso.
Otteniamo un triangolo BRC congruente a DEC.
Congiungiamo A con R.
Otteniamo due triangoli isosceli, ABR e ARC, poiché:
$AC \cong DF \ \wedge DF \cong RC \Longrightarrow AC \cong RC$
$AB \cong DE \ \wedge DE \cong RB \Longrightarrow AB \cong RB$
e gli angoli alla base sono congruenti $\widehat{BRA} \cong \widehat{RAB}$ e $\widehat{CRA} \cong \widehat{RAC}$.



Consideriamo i due triangoli ABC e BRC, essi hanno:
$AB \cong RB$ per dimostrazione precedente
$AC \cong RC$ per dimostrazione precedente
$\widehat{CAB} \cong \widehat{BRC}$ perché somma di angoli congruenti
Per il I criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti. Per la proprietà transitiva si ottiene.
$ABC \cong BRC \wedge BRC \cong DEF \Longrightarrow ABC \cong DEF$

Verifica se hai compreso

Dimostra il seguente teorema

Le mediane relative ai lati obliqui di un triangolo isoscele sono congruenti.

Ip:

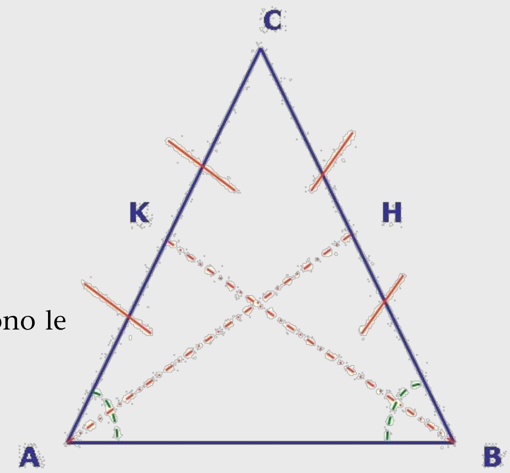
……………………………

……………………………

……………………………

Ts:

……………………………



Considera il triangolo isoscele ABC in figura. AH e BK sono le …………………………… relative ai lati obliqui.

Osserva i triangoli ABK e ABH, hanno:

AB in …………………………………

Gli angoli KAB e ABH sono …………………………………

perché angoli alla ………………………………… del triangolo isoscele;

AK congruente a BH , perché H ed K sono punti

…………………………………di lati congruenti

I due triangoli ABK e ABH sono congruenti per il …………………………………di congruenza.

Puoi dedurre che …………………………………

Individua il valore di verità delle seguenti affermazioni

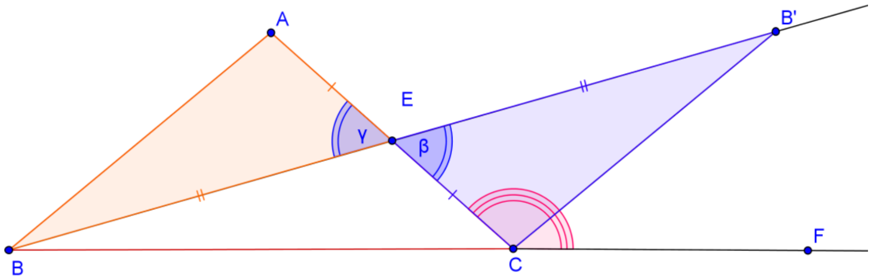
Proposizione	**Vero**	**Falso**
Due triangoli aventi tre angoli congruenti sono congruenti		
Un triangolo isoscele ha l' altezza, la mediana e la bisettrice relative ai due lati obliqui coincidenti		
Le mediane relative ai lati obliqui di un triangolo isoscele sono congruenti		
Due triangoli che hanno due lati congruenti ed un angolo congruente sono congruenti		
Una figura è sempre congruente a sé stessa		
Se la figura F è congruente alla figura F' allora F' non sarà congruente ad F		
Un triangolo equilatero è un particolare triangolo isoscele		

Disuguaglianze in un triangolo

Teorema dell' angolo esterno
In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore dei due angoli interni ad esso non adiacente.

Ip:
ACF angolo esterno

Ts:
$\widehat{ACF} > \widehat{ABC}$
$\widehat{ACF} > \widehat{CAB}$



Dimostrazione

Prolunghiamo il lato BC dalla parte di C e consideriamo l' angolo esterno $\widehat{ACF}$. Prendiamo sul lato AC il punto medio E e, congiungiamo B con E . Prolunghiamo BE dalla parte di E di un segmento EB' congruente a EB.
Congiungiamo B' con C. Consideriamo i due triangoli ABE e ECB'. Essi hanno:
$BE \cong EB'$ per costruzione
$AE \cong EC$ per costruzione
$\widehat{AEC} \cong \widehat{B'EC}$ perché angoli opposti al vertice.
I due triangoli sono congruenti per il I criterio di congruenza, conseguentemente $\widehat{ABC} \cong \widehat{ECB'}$.
L' angolo $\widehat{ECB'}$ è interno all' angolo $\widehat{ACF}$ quindi $\widehat{ECB'} < \widehat{ACF}$. Possiamo dedurre che anche $\widehat{ABC} < \widehat{ACF}$.

Ripetendo la costruzione considerando il punto medio del lato BC, al posto del punto medio del lato AC si dimostra che $\widehat{ACF} > \widehat{CAB}$.

Come conseguenza di questo teorema possiamo enunciare:

Teorema 2.10
In un triangolo qualsiasi la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto.

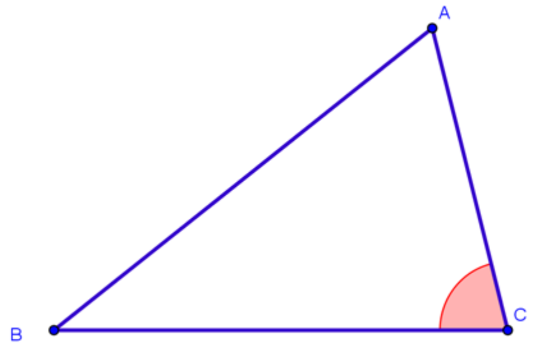
Teorema 2.11
In un triangolo vi sono almeno due angoli acuti e non può avere due angoli ottusi, o due angoli retti o un angolo retto e uno ottuso.

Teorema 2.12
In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono sempre acuti

Relazione tra lati e angoli opposti di un triangolo

Teorema 2.13

Un triangolo avente due lati non congruenti, ha gli angoli opposti non congruenti, e a lato maggiore corrisponde angolo maggiore.



Ip:

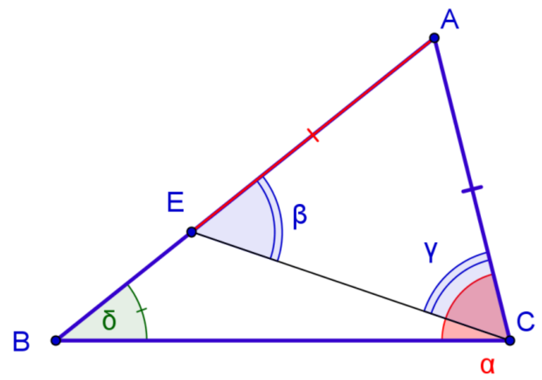
$AB > AC$

Ts:

$\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$

Dimostrazione

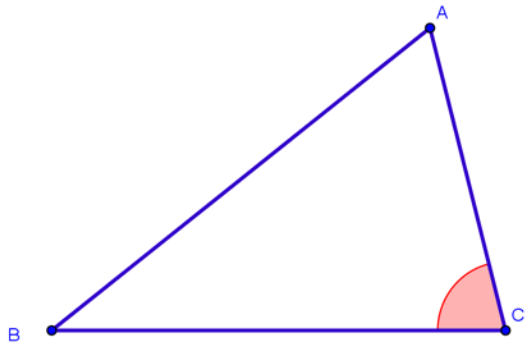
Prendiamo sul lato AB un punto E tale che AE=AC.
Congiungiamo E con C. Otteniamo un triangolo isoscele sulla base EC con $\widehat{CEA} \cong \widehat{ACE}$.
Osserviamo gli angoli, possiamo dedurre che:



$\widehat{ACB} > \widehat{ACE}$ per costruzione
$\widehat{CEA} > \widehat{CBE}$ perché angolo esterno al triangolo CBE.
Sapendo che
$\widehat{CEA} \cong \widehat{ACE}$ otteniamo
$\widehat{ACB} > \widehat{ACE} \cong \widehat{CEA} > \widehat{CBE} \Rightarrow \widehat{ACB} > \widehat{CBA}$

Teorema 2.14 (Inverso del precedente)

Un triangolo avente due angoli non congruenti, ha i lati opposti non congruenti, e ad angolo maggiore corrisponde lato maggiore.



Ip:

$\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$

Ts:

$AB > AC$

Dimostrazione

Consideriamo le varie possibilità negando la tesi che dobbiamo dimostrare:

1) $\boldsymbol{AB \cong AC}$ il triangolo sarebbe isoscele e gli angoli alla base sarebbero congruenti, $\widehat{ACB} \cong \widehat{ABC}$. Questa deduzione contraddice l' ipotesi.

2) $\boldsymbol{AB < AC}$ per il teorema precedentemente dimostrato a lato maggiore corrisponde angolo maggiore, quindi avremmo $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$. Questa deduzione contraddice l' ipotesi.

3) Dai casi precedentemente analizzati possiamo concludere che l' unica conclusione che possiamo trarre è $\boldsymbol{AB > AC}$

Corollario

È una proposizione che si ricava da un teorema dimostrato.

Corollari

In un triangolo rettangolo l' ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

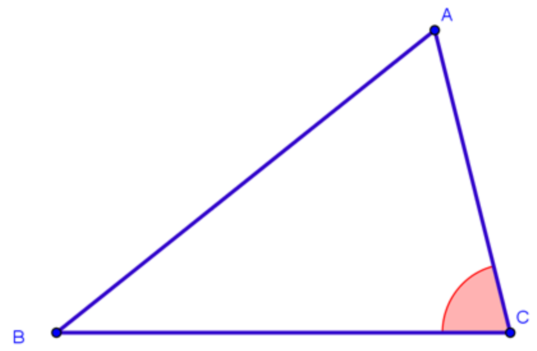
In un triangolo ottusangolo il lato opposto all' angolo ottuso è maggiore degli altri due lati.

Disuguaglianza triangolare

In un qualsiasi triangolo ciascun lato è maggiore della somma degli altre due lati ed è minore della loro differenza.

$\boldsymbol{AB} > BC + AC$

$\boldsymbol{AB} < BC - A\boldsymbol{C}$



HAI IMPARATO ....

1. A confrontare segmenti e angoli
2. I criteri di congruenza tra triangoli
3. Alcune proprietà fondamentali del triangolo isoscele
4. Le disuguaglianze triangolari

RETTE PERPENDICOLARI E PARALLELE

PREREQUISITI
Angoli e loro proprietà
Congruenza tra triangoli

OBIETTIVI

Sapere
Conoscere la perpendicolarità e il parallelismo
Conoscere la congruenza tra triangoli rettangoli

Saper Fare
Saper enunciare e dimostrare la perpendicolarità
Saper enunciare e dimostrare il criterio di parallelismo
Saper enunciare e dimostrare i criteri di congruenza tra triangoli rettangoli
Saper dimostrare teoremi utilizzando i criteri di parallelismo e la perpendicolarità

Rette perpendicolari

Sappiamo che due rette che si intersecano in un punto sono incidenti, tra esse esistono due rette particolari: le rette perpendicolari.

Definizione

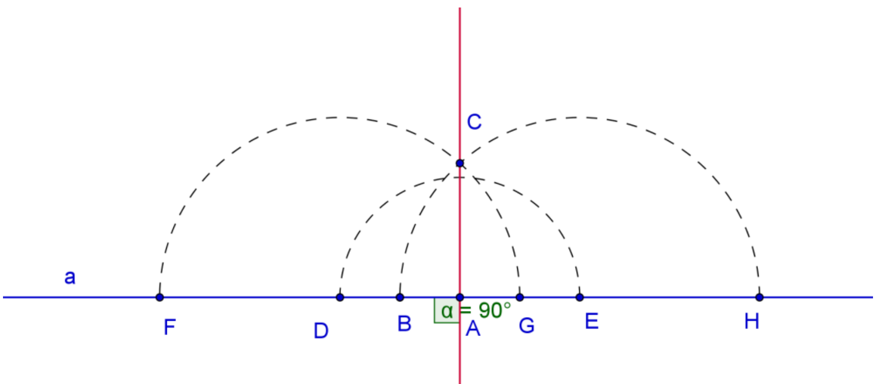
Due rette si dicono **perpendicolari** quando si incontrano in un punto e formano quattro angoli retti.

Teorema dell' esistenza e dell' unicità della perpendicolare
Per un punto passa una ed una sola retta perpendicolare ad una retta data.

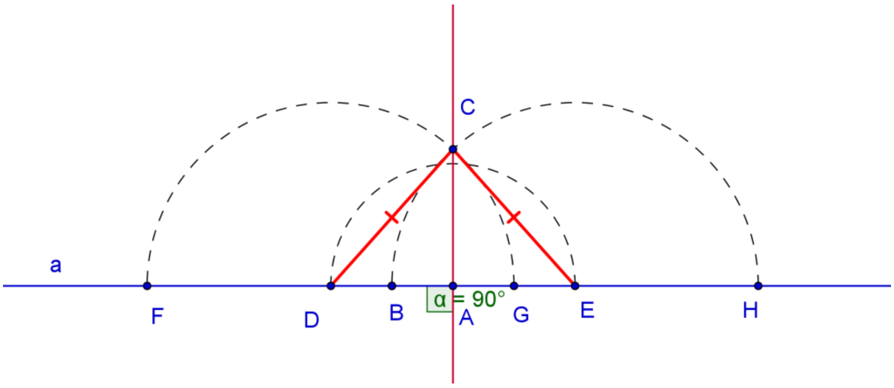
Per dimostrare il teorema consideriamo due casi: il punto appartiene alla retta, il punto è esterno alla retta.

Punto appartiene alla retta

Costruiamo la perpendicolare utilizzando riga e compasso.
Consideriamo una retta a e un punto A appartenente alla retta, $A \in a$.
Costruiamo una semicirconferenza con centro in A e raggio a scelta, che incontra la retta a nei punti D ed E.



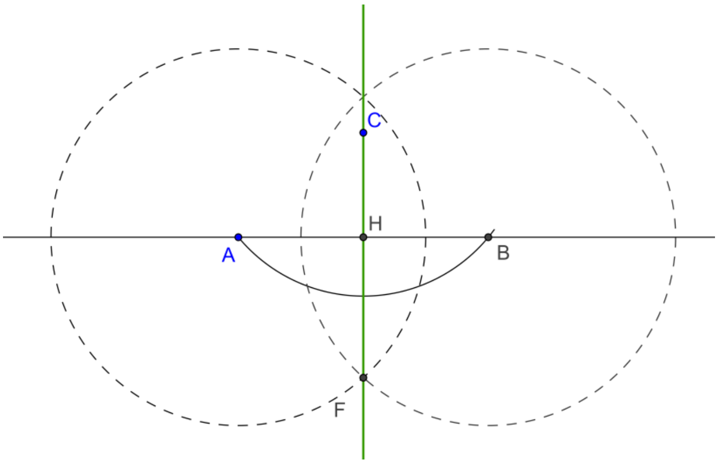
Puntiamo il compasso con centro in D e poi in E e disegniamo due semicirconferenze che si intersecano nel punto C. Congiungiamo C con A e otteniamo la retta perpendicolare alla retta a passante per A.
Dimostriamo, ora, che tale retta AC è perpendicolare alla retta a.



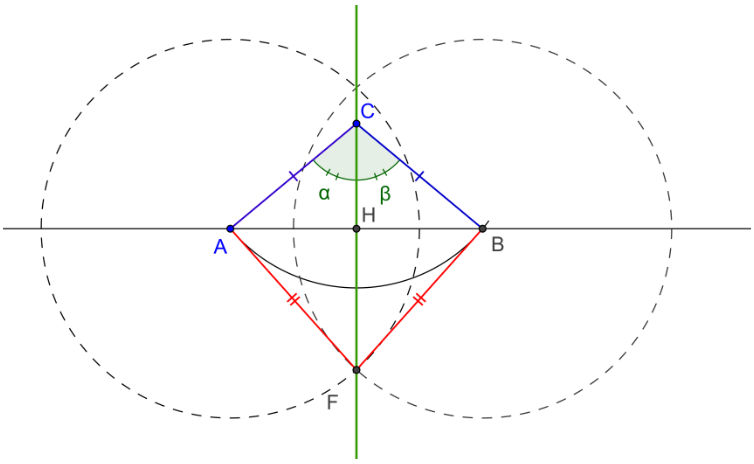
Congiungiamo C con D e con E e, consideriamo il triangolo CDE, isoscele sulla base DE, perché:
$CD \cong CE$ perché raggi delle due semicirconferenze di centro D ed E.
A è il punto medio di DE perché centro della semicirconferenza di centro A e diametro DE.
La retta CA è mediana relativa alla base del triangolo isocele CED. La mediana è anche bisettrice e altezza quindi, AC è perpendicolare alla retta a.

Punto esterno alla retta

Costruiamo la perpendicolare utilizzando lo stesso procedimento precedente.
Consideriamo una retta a e un punto C esterno alla retta a.
Costruiamo un arco di circonferenza con centro in C e raggio a scelta, che incontra la retta a nei punti A ed B.
Puntiamo il compasso con centro in A e poi in B e disegniamo due circonferenze che si intersecano nel punto F. Congiungiamo C con F e otteniamo la retta perpendicolare alla retta a passante per F, che interseca la retta a in H.



Dimostriamo, ora, che la retta CF è perpendicolare alla retta a.



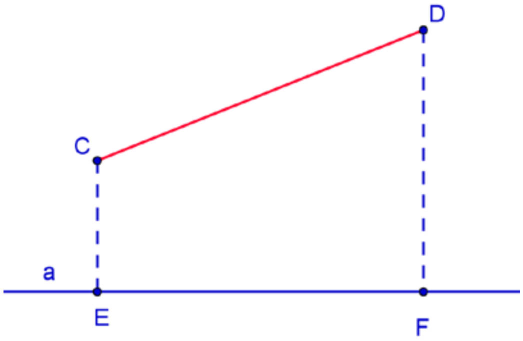
Congiungiamo C con A e con B e , A con F e B con F.
Consideriamo i due triangoli FAC e CBF.
Essi hanno
$AC \cong BC$ per costruzione
$AF \cong BF$ per costruzione
CF in comune
I due triangoli sono congruenti per il III criterio di congruenza.
Conseguentemente hanno:
$\widehat{ACH} \cong \widehat{HCB}$.
La retta CH è bisettrice dell' angolo $\widehat{ACB}$ del triangolo isoscele ACB, quindi è anche mediana ed altezza.
Possiamo concludere che la retta CH è perpendicolare alla retta a.
Si dimostra che la retta perpendicolare ad una retta data per unto, appartenente o ad essa esterna, è unica

Proiezione ortogonale

Data una retta r e un punto A ad essa esterna, la perpendicolare da A alla retta la interseca in punto B detto **Piede della perpendicolare** o **proiezione ortogonale di A su r,** e il segmento AB è detto **segmento perpendicolare.**

La proiezione ortogonale di un segmento su un retta è il segmento ottenuto sulla retta avente per estremi le proiezioni degli estremi del segmento dato.

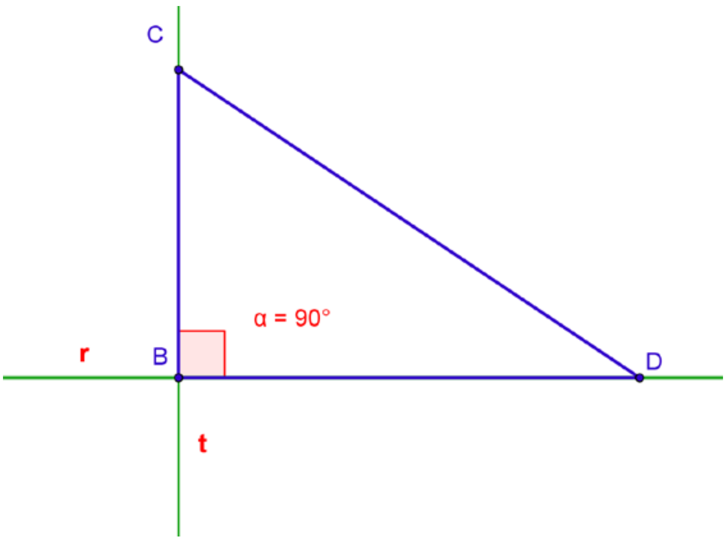
La proiezione ortogonale del segmento CD è il segmento EF.



Definizione

Si definisce **distanza di un punto da una retta** la lunghezza del segmento che ha, per estremi il punto e la piede della perpendicolare uscente dal punto alla retta data.

Teorema 3.1
Il segmento perpendicolare condotto da un punto esterno ad una retta è minore di qualsiasi segmento obliquo condotto dal punto alla retta.



Ip
t⊥r

Ts
BC<CD

Dimostrazione
Preso un punto C tracciamo la retta t perpendicolare alla retta r, sia B il loro punto di intersezione.
Costruiamo una retta uscente da C che in D la retta r e congiungiamo C con D.
Consideriamo il triangolo rettangolo CBD, retto in B. CD è l' ipotenusa di tale triangolo e quindi maggiore di entrambi i cateti , per il teorema precedentemente dimostrato sulle disuguaglianze di un triangolo.
Possiamo concludere che il segmento perpendicolare CB è minore di qualsiasi segmento obliquo uscente da C.

Verifica se hai compreso

1. **Dato un punto A, non appartenente ad una retta retta r, quante rette perpendicolari per A alla retta data si possono condurre?**

- ☐ Infinite
- ☐ Nessuna
- ☐ Una sola
- ☐ Almeno una

2. **Completa la seguente affermazione**

La distanza di un punto da una retta è la .... del

segmento di perpendicolare condotto dal .... alla retta.

Rette parallele

È noto che due rette si dicono parallele quando non si incontrano mai.

Definizione

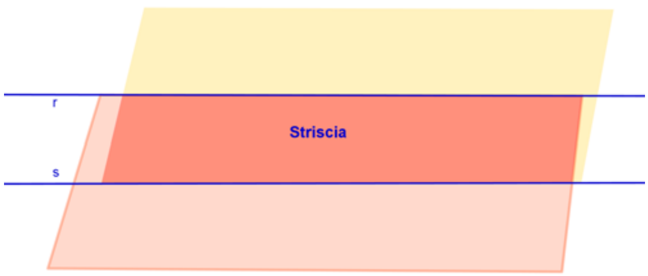
Due rette **r** ed **s** si dicono **parallele** quando non hanno punti d' intersezione.

$$r \| s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$$

Due rette **r** ed **s** si dicono **coincidenti** quando hanno tutti i punti in comune

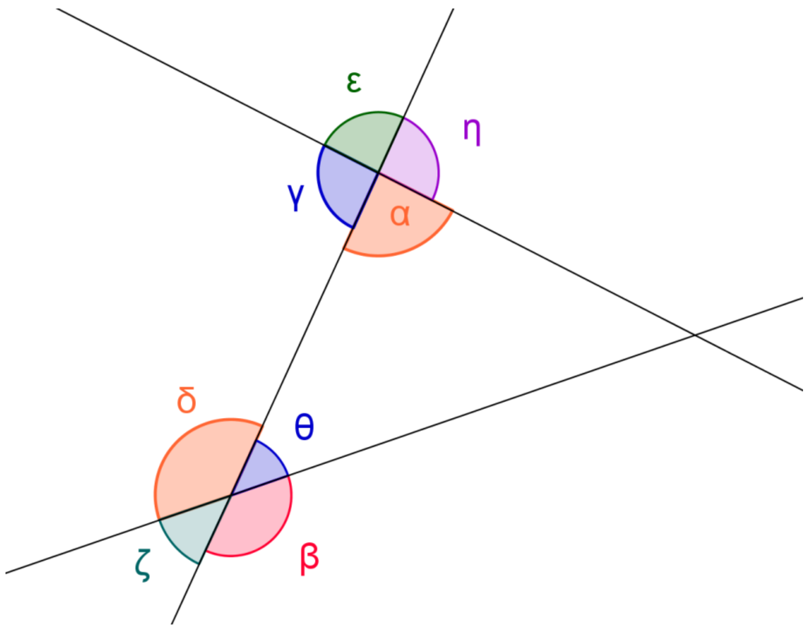
$$r \equiv s$$

Consideriamo due rette parallele r ed s.
L' intersezione tra il semipiano avente origine r e contenente la retta s e il semipiano avente origine s e contenente la retta r è detta **striscia**, di lati r ed s.



Criteri di parallelismo

Consideriamo due rette tagliate da una trasversale, esse formano otto angoli che vengono chiamati a seconda della loro posizione.



Angoli alterni interni

Le coppie **(α,σ)** **e** **(γ,θ)**

Angoli alterni esterni

Le coppie **(ε,β)** e **(η,ζ)**

Angoli corrispondenti

Le coppie (γ, ζ) (α,β),(η,θ), (ε,σ)

Angoli coniugati interni

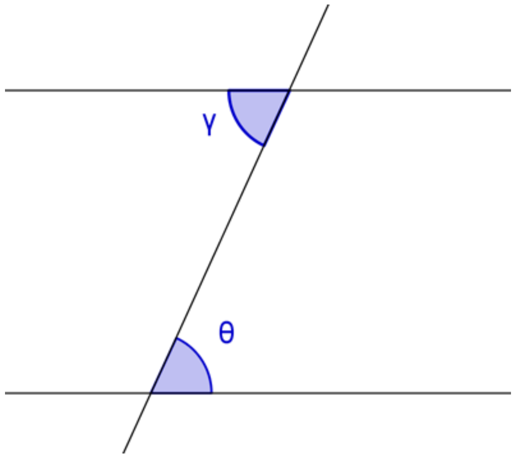
Le coppie (γ, σ), (α, θ)

Angoli Coniugati esterni

Le coppie (η, β), (ε, ζ)

Teorema 3.4

Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora le due rette sono parallele.

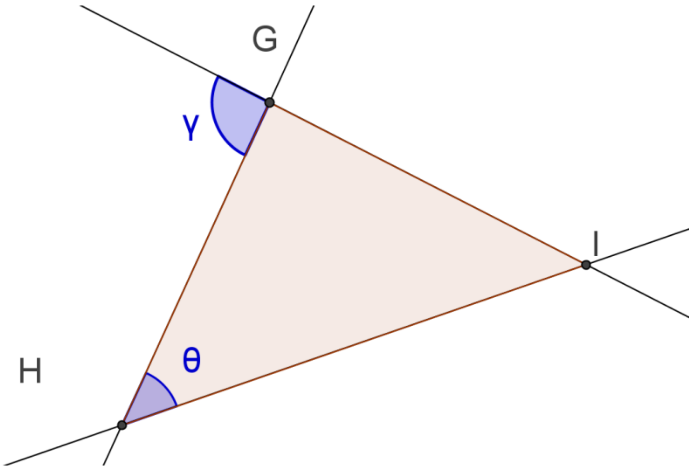


Ip.
$\gamma \cong \theta$

Ts:
r∥s, t ∩ $(r \| s)$

Dimostrazione

Supponiamo che le due rette r ed s non siano parallele e si incontrino in I.
Consideriamo il triangolo HGI. L' angolo γ è esterno al triangolo e quindi, per il teorema dell' angolo esterno precedentemente dimostrato è maggiore di ogni angolo interno ad esso non adiacente.
$\gamma > \theta$
Ma per ipotesi $\gamma \cong \theta$, siamo giunti quindi ad una contraddizione, dobbiamo quindi concludere che la tesi è vera, cioè r ∥s.



Dimostrazione per assurdo

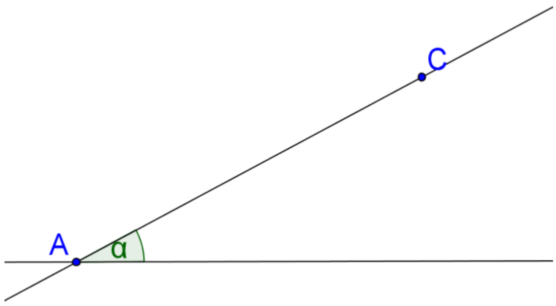
Per dimostrare un teorema tramite la dimostrazione per assurdo si procede nel seguente modo:

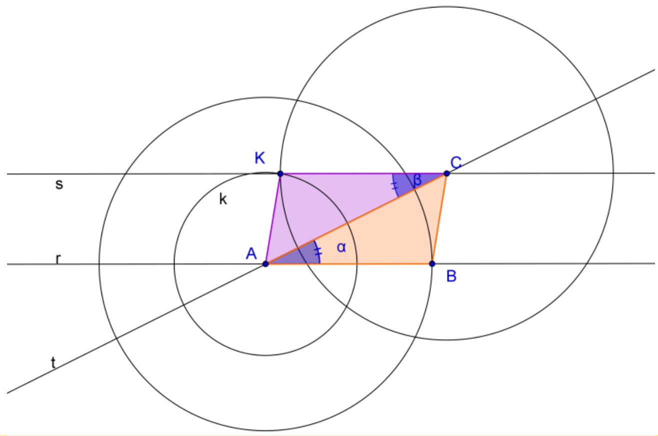
- *Si nega la verità della tesi, cioè la si suppone falsa*
- *Si procede con delle deduzioni come nelle dimostrazioni che procedono con il metodo diretto*
- *Si arriva ad un certo punto ad una conclusione contraddittoria, cioè o alla negazione dell' ipotesi o alla negazione di qualche teorema precedentemente dimostrato*
- *Dalla contraddizione ottenuta si può dedurre la verità della tesi*

Retta passante per un punto P e parallela ad una retta r

Consideriamo i due casi:

1. $\boldsymbol{P \in r}$ La retta passante per P è parallela ad r coincide con la retta stessa
2. $\boldsymbol{P \notin r}$
   L' esistenza di una parallela ad una retta data è conseguenza del fatto che è possibile costruire per un punto esterno ad una retta un angolo congruente a quello dato





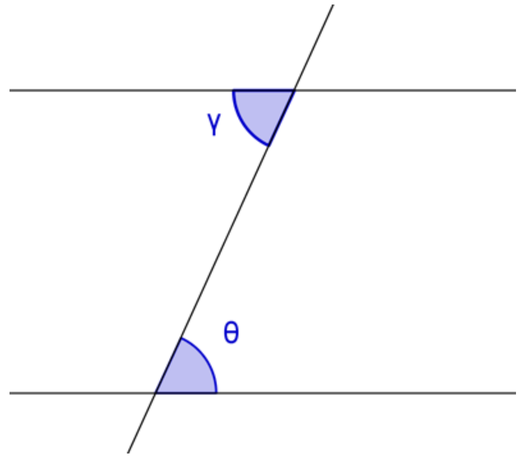
Si consideri una retta r e una retta t che incontra r in A. Consideriamo un punto C sulla retta t.	Con centro in C e apertura CA disegniamo una circonferenza . Con apertura CA disegniamo una circonferenza con centro in A. Quest' ultima incontra la retta r in B **.** Disegniamo la circonferenza con centro in A e ampiezza CB che interseca la circonferenza con centro in P nel punto K. Otteniamo due triangoli. AKC e ACB congruenti per il III criterio di congruenza, conseguentemente gli angoli $\widehat{KCA}$ e $\widehat{CAB}$ sono congruenti, ma anche alterni interni rispetto alle rette KC e AB, tagliate dalla trasversale AC.. La retta KC è parallela alla retta r.

L' unicità della parallela per un punto esterno ad una retta viene accettata per vera, ma non è stata dimostrata. E' noto come il quinto postulato di Euclide

Quinto postulato di Euclide
Data una retta r e un punto P esterno ad essa è unica la retta parallela ad r e passante per P.

Teorema 3.5

Due rette parallele tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti

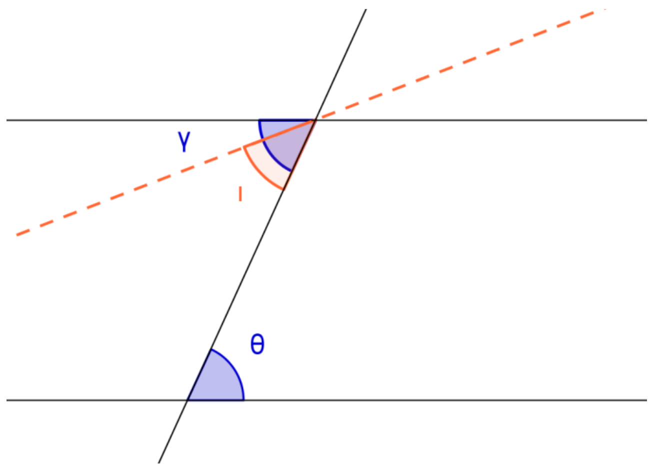


Ip.
r||s, t ∩ (r||s)

Ts:
γ≅θ

Dimostrazione

Supponiamo che **γ** e **θ** non siano congruenti. Conduciamo una retta t' che formi con la retta t un angolo i congruente a **θ**. Avremmo:
t'||s perché formano angoli alterni interni congruenti
s||r per ipotesi.
Esisterebbero due rette parallele passante per un punto ad una retta data. Questa conclusione contraddice il quinto postulato, conseguentemente **γ≅θ**



Possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.6
Due rette sono parallele se e soltanto se, tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti.

Mettiti alla prova

Prova a verificare che la congruenza tra angoli alterni interni equivale ad affermare:
- la congruenza tra angoli alterni esterni
- la congruenza tra angoli corrispondenti
- la condizione di supplementarità tra angoli coniugati interni e coniugati esterni

Criterio generale di parallelismo

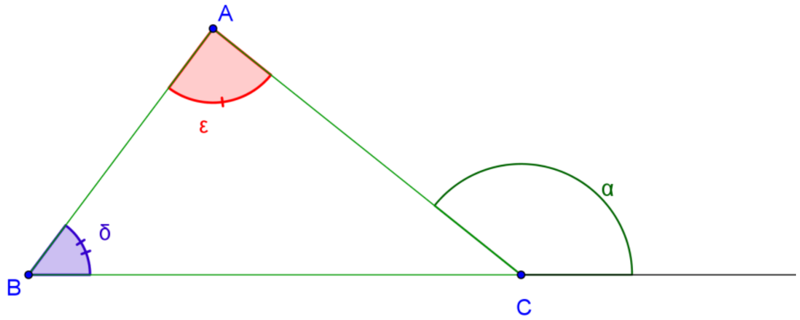
Due rette tagliate da una trasversale sono parallele se e soltanto se:
- **formano angoli alterni interni o alterni esterni congruenti**
- **formano angoli corrispondenti congruenti**
- **formano angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari**

Corollario
Due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele.

Proprietà degli angoli nei triangoli

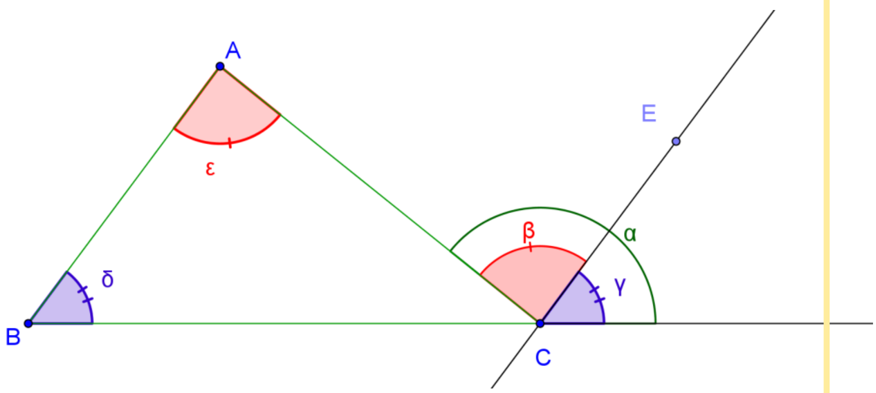
Teorema dell' angolo esterno
In un triangolo ciascun angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti.

Ip
Triangolo ABC
Angolo esterno α



Ts
$\alpha \cong \sigma + \varepsilon$

Dimostrazione
Dal vertice C dell' angolo esterno α costruiamo la retta parallela al lato AB. Siano β e γ gli angoli in cui è suddiviso l' angolo α. Consideriamo le due rette parallele AB e CE tagliate dalla trasversale AC, notiamo che:
$\beta \cong \varepsilon$ perché alterni interni
Consideriamo le due rette parallele AB e CE tagliate dalla trasversale BC, notiamo che:
$\sigma \cong \gamma$ perché corrispondenti. Ma
$\alpha \cong \beta + \gamma \Longrightarrow \alpha \cong \sigma + \varepsilon$



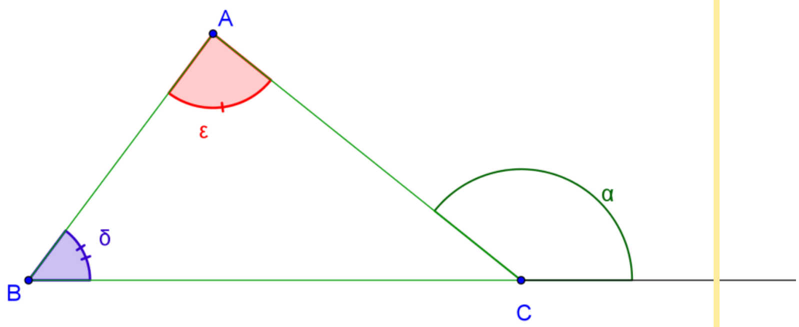
Conseguenza di questo teorema è il seguente:

Teorema 3.7
La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto.

Ip
ABC triangolo

Ts
$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} \cong 180°$

Dimostrazione



Consideriamo l' angolo $\widehat{BCA}$ e l' angolo esterno α , essi sono supplementari
$\widehat{BCA} + \alpha \cong 180°$
Per il teorema precedentemente dimostrato si sa che: $\alpha \cong \widehat{ABC} + \widehat{CAB}$. Sostituendo nella relazione precedente si ottiene $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} \cong 180°$.

Da questo teorema si può dedurre il seguente corollario

Criterio generalizzato di congruenza tra triangoli
Due triangoli aventi due angoli congruenti e un lato opposto ad uno di essi sono congruenti.

Mettiti alla prova

Dimostra il criterio generalizzato di congruenza tra triangoli

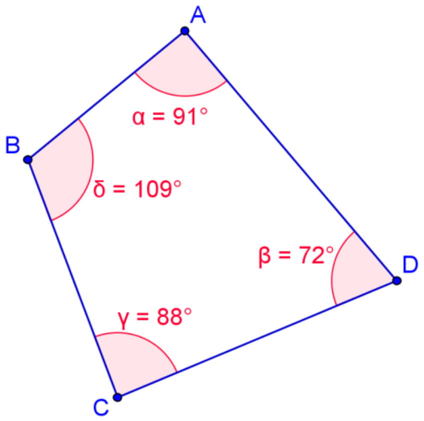
Proprietà degli angoli di un poligono

Abbiamo dimostrato che in un triangolo la somma degli angoli interni vale un angolo piatto, in generale nei poligoni la somma degli angoli interni dipende dal numero dei lati.

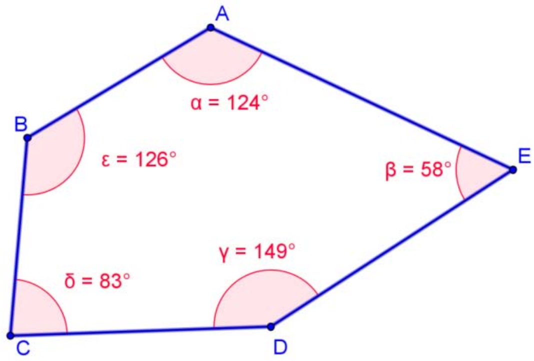
Definizione

In un **poligono convesso** la somma degli **angoli interni** è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono sottratti di due

$$S = (n - 2)180°$$



E' un **quadrilatero**, la somma degli angoli interni è 360°.
$S = (4 - 2) \cdot 180° \implies S = 2 \cdot 180° \implies S = 360°$



E' un **pentagono**, la somma degli angoli interni è 540°.
$S = (5 - 2) \cdot 180° \implies S = 3 \cdot 180° \implies S = 540°$

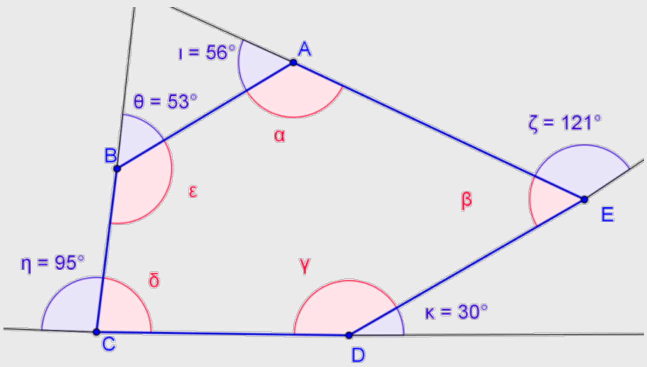
Definizione

In un **poligono convesso** la somma degli **angoli esterni** è sempre uguale a 360°

Gli angoli esterni sono tutti supplementari degli angoli interni ad esso adiacenti quindi la loro somma è $n \cdot 180°$, se da essi togliamo la somma degli angoli interni $(n - 2) \cdot 180°$ otteniamo la somma degli angoli esterni

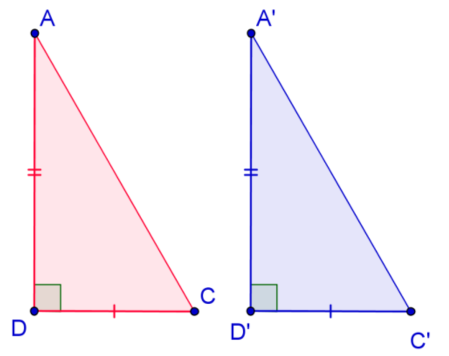
$$S = n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = n \cdot 180° - n \cdot 180° + 360° = 360°$$

Verifica che il pentagono, nell' immagine, ha come somma degli angoli esterni 360°

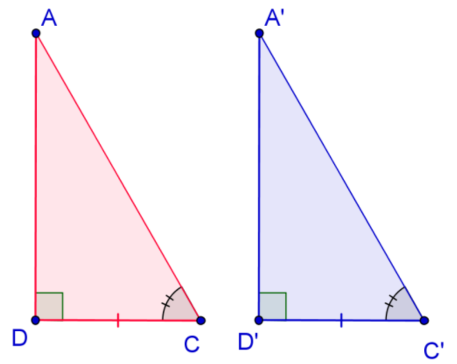


Congruenza e triangoli rettangoli

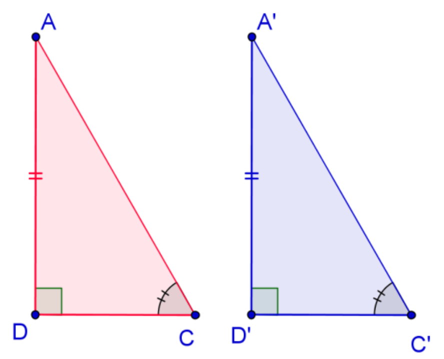
Utilizzando i criteri di congruenza studiati si possono determinare i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli.



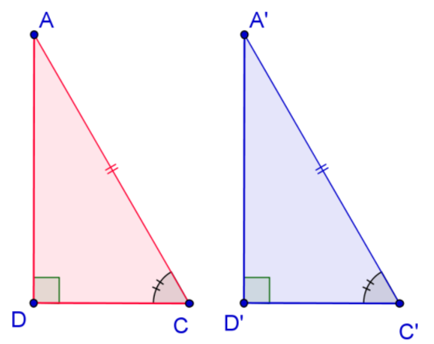
Due triangoli rettangoli sono congruenti quando hanno congruenti i due cateti.
Questo criterio è valido per il I criterio di congruenza, l' angolo compreso è sottinteso sia quello di 90°.



Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l' angolo adiacente.
Questo criterio è valido per il II criterio di congruenza, l' altro angolo adiacente è sottinteso sia quello di 90°.

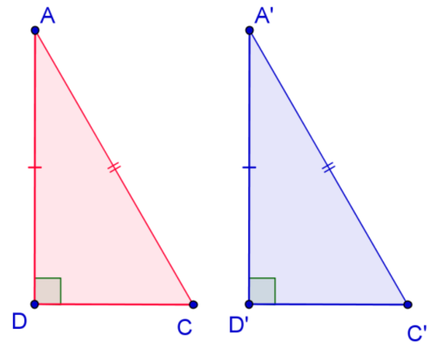


Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l' angolo acuto opposto
Questo criterio è valido per il criterio di congruenza generalizzato, l' angolo compreso è sottinteso sia quello di 90°.



Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti l' ipotenusa e un angolo acuto
Questo criterio è valido per il criterio di congruenza generalizzato, l' angolo compreso è sottinteso sia quello di 90°.

Teorema 3.8
Due triangoli rettangoli aventi congruenti un cateto e l' ipotenusa sono congruenti.

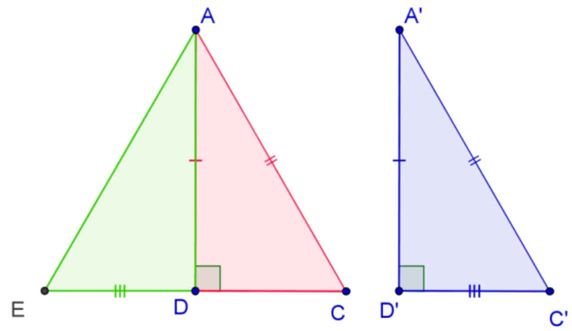


Ip
$AC \cong A'C'$
$AD \cong A'D'$

Ts:
$ADC \ \cong \ A'D'C'$

Dimostrazione

Costruiamo sul prolungamento di D, dalla parte di D un segmento $DE \ \cong \ D'C'$ e congiungiamo E con A.
Consideriamo i due triangoli **A'D'C'** e **ADE,** essi hanno:
$AD \ \cong \ A'D'$ per ipotesi
$ED \cong \ D'C'$ per costruzione
Conseguentemente i due triangoli rettangoli **A'D'C'** e **ADE** sono congruenti, perché hanno due cateti congruenti, quindi
$AE \cong A'C'$



Consideriamo i due triangoli **EAD e ADC**, essi hanno:

$AE \ \cong \ AC$ per transitività essendo $AC \cong A'C'$ per ipotesi
AD in comune
$ED \cong DC$ essendo il triangolo AEC isoscele sulla base EC essendo AD altezza e mediana.

Conseguentemente i due triangoli rettangoli **EAD e ADC** sono congruenti.
Dalle dimostrazioni precedenti abbiamo, per transitività

$$A'D'C' \cong ADE \quad \wedge ADE \cong ADC \implies A'D'C' \cong ADC$$

HAI IMPARATO ...

1. l' esistenza e l' unicità della perpendicolare ad una retta data
2. i criteri di parallelismo tra rette
3. le proprietà degli angoli di un triangolo
4. le proprietà degli angoli di un poligono
5. la congruenza tra triangoli rettangoli

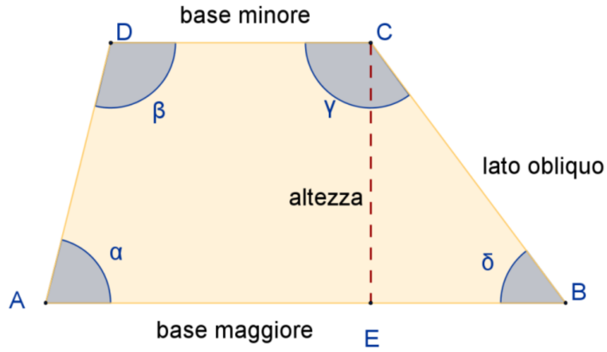
I quadrilateri e le Isometrie

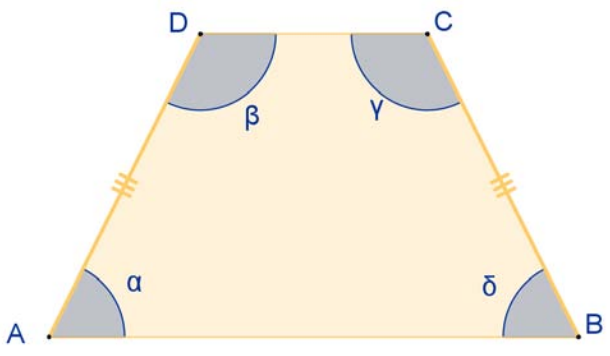
I QUADRILATERI

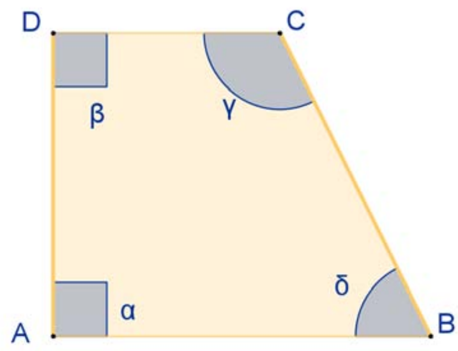
PREREQUISITI
Criteri di congruenza dei triangoli
Rette parallele e perpendicolari
OBIETTIVI
Sapere
Saper definire un trapezio, un parallelogramma e i parallelogrammi particolari
Sapere le relative proprietà dei parallelogrammi
Saper fare
Saper riconoscere un trapezio, un parallelogramma e un parallelogramma particolare
Saper utilizzare le proprietà dei trapezi e dei parallelogrammi nelle dimostrazioni.

Il Trapezio

Il trapezio è un particolare quadrilatero avente due lati paralleli non congruenti dette **basi, una base minore e l' altra base maggiore,** e gli altri due **lati obliqui**. L' **altezza** di un trapezio è la distanza tra le due basi, cioè il segmento di perpendicolare condotto dai vertici della base minore a quella maggiore.







Un **trapezio** avente i due lati obliqui congruenti è detto **isoscele**

Un **trapezio** avente uno dei lati obliqui perpendicolare alle basi è detto **rettangolo**

Essendo un quadrilatero la somma degli angoli interni di un trapezio è 360° e gli angoli adiacenti ai lati obliqui sono coniugati interni rispetto alle rette parallele a cui appartengono le basi, tagliate dal lato obliquo.

Teorema 4.1
Gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo di un trapezio sono supplementari

Esercizio

Dimostra il seguente teorema

Teorema 4.2
Condizione sufficiente affinché un trapezio sia isoscele è che sia verificata una delle seguenti condizioni:

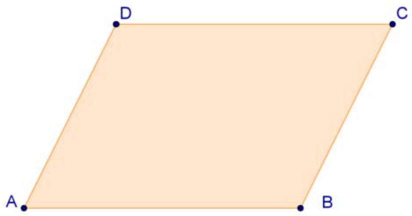
- **gli angoli adiacenti ad una delle due basi siano congruenti**
- **le diagonali siano congruenti**

Parallelogrammi

Tra i **quadrilateri** i ne esistono alcuni che godono di particolari proprietà: i **parallelogrammi**

Definizione

Un quadrilatero che abbia i lati opposti paralleli si dice **parallelogramma**.

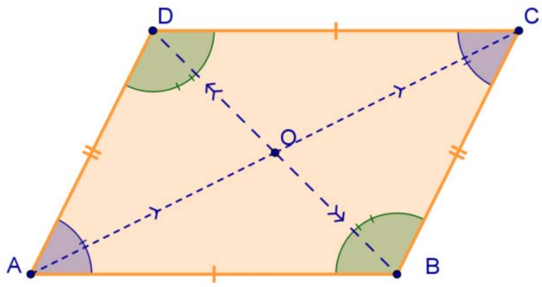


Vediamo alcune proprietà di queste particolari figure.

Proprietà

I parallelogrammi hanno:

- I lati opposti congruenti
- Gli angoli opposti congruenti;
- Gli angoli adiacenti
- Le diagonali si incontrano nel loro punto medio, detto centro di **simmetria** del parallelogramma



Queste proprietà possono essere tutte dimostrate, sono quindi altrettanti teoremi.

Mettiti alla prova

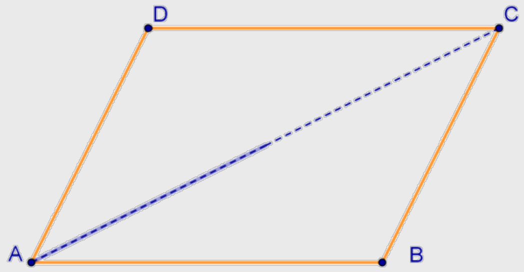
Prova a dimostrare le proprietà dei parallelogrammi completando le frasi.

Teorema 4.3

Un parallelogramma ha i lati opposti congruenti.

Ip.
$AD//BC$
$DC//AB$

Ts.
$AD \cong BC$
$AB \cong DC$



Dimostrazione

E' dato il parallelogramma ABCD. Congiungi A con C e considera i due triangoli ABC e CDA.

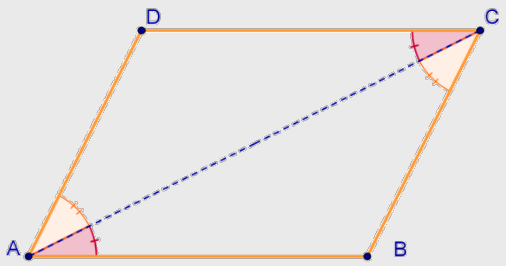
Essi hanno:

l' angolo $\widehat{CAB}$ congruente a $\widehat{ACD}$ perché alterni

.... rispetto alle due rette

parallele AB e CD tagliate dalla

....



Gli angoli $\widehat{DAC}$ e $\widehat{BCA}$ congruenti perché .... interni rispetto alle due rette

parallele .... tagliate dalla trasversale AC.

Il lato AC è in ....

I due triangoli sono congruenti per il .... criterio di congruenza,

conseguentemente $AD \cong BC$ e $AB \cong DC$.

Teorema 4.4

Un parallelogramma ha gli angoli opposti congruenti.

Riprendendo la dimostrazione precedente deduci che:

$\boldsymbol{\widehat{ABC} \cong \widehat{CDA}}$ ***e*** $\boldsymbol{\widehat{DAB} \cong \widehat{BCD}}$

Esercizio

Dimostra il seguente teorema

Teorema 4.5

Un parallelogramma ha le diagonali che si incontrano nel loro punto medio

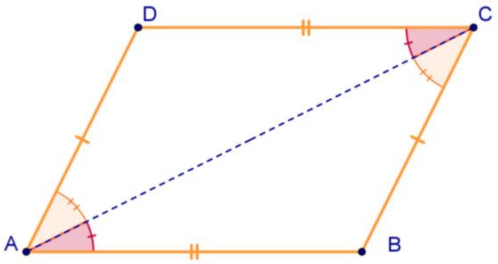
Condizioni per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma

Dalla definizione di parallelogramma si può già dedurre una prima condizione per affermare che un quadrilatero sia un parallelogramma.
Un quadrilatero avente entrambe le coppie di lati opposti paralleli è un parallelogramma.

Enunciamone altre.

Teorema 4.6
Un quadrilatero è un parallelogramma se è verificata una delle seguenti condizioni:
- **a. Le coppie di lati opposti sono entrambe congruenti**
- **b. Le coppie di angoli opposti sono entrambe congruenti**
- **c. Le diagonali si incontrano nel loro punto medio.**

Caso a.



Ip.
$AD \cong BC$
$AB \cong DC$
Ts.
ABCD è un parallelogramma

Dimostrazione

Consideriamo i due triangoli ABC e CDA, essi hanno:
$AD \cong BC$ per ipotesi

$AB \cong DC$ per ipotesi

AC in comune

I due triangoli sono congruenti per il III criterio di congruenza dei triangoli, conseguentemente hanno:
$\widehat{CAB} \cong \widehat{ACD}$ sono angoli alterni interni rispetto alle due rette DC e AB tagliate dalla trasversale AC, quindi **DC //AB**

$\widehat{DAC} \cong \widehat{BCA}$ sono angoli alterni interni rispetto alle due rette AD e BC tagliate dalla trasversale AC, quindi **AD //BC**

ABCD è un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli.

Mettiti alla prova

Prova a dimostrare del teorema 4.6 il punto b. e il punto c.

Teorema 4.7

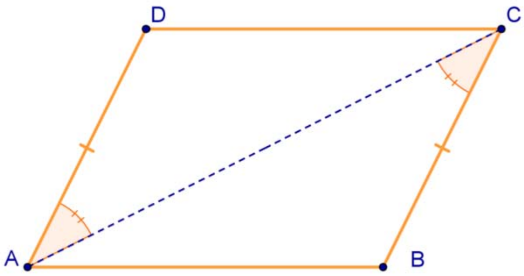
Un quadrilatero ABCD è un parallelogramma se ha una coppia di lati opposti congruenti e paralleli

Ip.

$AD \cong BC$
AD//BC

Ts.

ABCD è un parallelogramma



Dimostrazione

Consideriamo i due triangoli ABC e CDA, essi hanno:
$AD \cong BC$ per ipotesi

$\widehat{DAC} \cong \widehat{BCA}$ angoli alterni interni rispetto alle due rette AD //BC tagliate dalla trasversale AC

AC in comune

I due triangoli sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli, conseguentemente hanno:
$AB \cong DC$

ABCD è un parallelogramma perché ha entrambe le coppie di lati opposti congruenti.

Riassumendo

Un quadrilatero è un parallelogramma se è verificata una delle seguenti cinque condizioni

Ha entrambi i lati opposti paralleli
Ha entrambe le coppie di lati opposti congruenti
Ha entrambe le coppie di angoli opposti congruenti
Le diagonali si incontrano nel loro punto medio
Ha una coppia di lati opposti congruenti e paralleli

Rettangolo

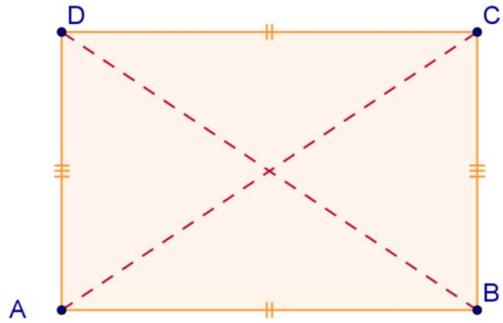
Se i lati del parallelogramma sono perpendicolari tra loro, si ha un particolare parallelogramma detto rettangolo

Definizione

Un **rettangolo** è un quadrilatero avente tutti e quattro gli angoli retti.

Teorema 4.8

Un rettangolo ha le diagonali congruenti



Ip.
$AD \cong BC$
$AB \cong DC$

Ts.
$AC \cong BD$

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli rettangoli ABD e ABC. Essi hanno:

$AD \cong BC$ per ipotesi

$AB \cong DC$ per ipotesi

Avendo due cateti congruenti i due triangoli sono congruenti, conseguentemente
$AC \cong BD$

Dalla definizione di rettangolo si può già dedurre una prima condizione per affermare che un quadrilatero sia un rettangolo
Un quadrilatero avente quattro angoli retti è un rettangolo.

Osservazione

Sappiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360° quindi, se tutti e quattro gli angoli sono congruenti allora sono tutti retti.

Teorema 4.9
Se un quadrilatero ha tutti e quattro gli angoli congruenti è un rettangolo.

Mettiti alla prova

Prova a dimostrare completando le frasi.

Teorema 5.0

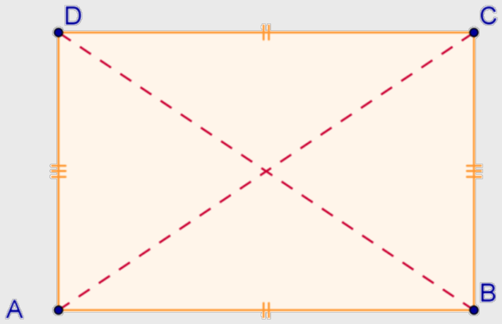
Un parallelogramma se ha le diagonali congruenti è un rettangolo.

Ip.

$AD \cong BC$
$AB \cong DC$
$BD \cong AC$

Ts.

$\widehat{ABC} \cong \widehat{BCD} \cong \widehat{CDA} \cong \widehat{DAB}$



Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABC e DAB, essi hanno:

....

....

I due triangoli sono congruenti per il ....

Gli angoli $\widehat{DAB}$ e $\widehat{ABC}$ sono congruenti e ...., perché coniugati

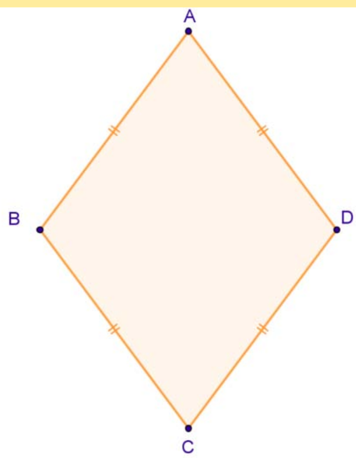
Interni, quindi sono retti.

Rombo

Se i lati del parallelogramma sono tutti congruenti tra loro, si ha un particolare parallelogramma detto rombo.

Definizione

Il **rombo** è un parallelogramma avente tutti e quattro i lati congruenti tra loro.



Il rombo gode delle proprietà seguenti:

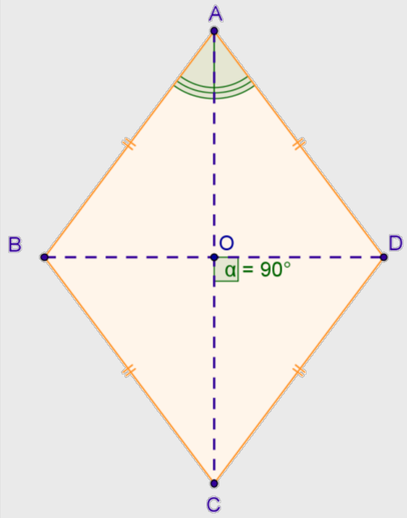
- Le diagonali (che si incontrano nel suo centro di simmetria come per tutti i parallelogrammi) sono perpendicolari tra loro
- Le diagonali sono bisettrici degli angoli interni

Mettiti alla prova

Prova a dimostrare completando le frasi.

Teorema 5.1

In un rombo le diagonali sono perpendicolari tra loro e sono bisettrici degli angoli interni.



Ip.

$AB \cong BC \cong CD \cong AD$

Ts
$BD \perp AC$

$\widehat{DAO} \cong \widehat{OAB}, \widehat{BCO} \cong \widehat{OCD}$
$\widehat{ABO} \cong \widehat{OBC}, \widehat{ODA} \cong \widehat{CDO}$

Dimostrazione

I)

Consideriamo i l triangolo ABD. Esso è

.... sulla base BD per ipotesi. La mediana AO relativa alla base è anche

.... conseguentemente $BD \perp AC$

II)

Consideriamo i due triangoli isosceli ABC e CDA. Essi sono congruenti per il .... criterio di congruenza. Conseguentemente hanno:

$\widehat{ABO} \cong \widehat{OBC}, \widehat{ODA} \cong \widehat{CDO}$

Dalla congruenza dei triangoli ABD e BCD si deduce che:
$\widehat{DAO} \cong \widehat{OAB}, \widehat{BCO} \cong \widehat{OCD}$

Dalla definizione di rombo si può già dedurre una prima condizione per affermare che un parallelogramma sia un rombo.
Un parallelogramma avente tutti e quattro i lati congruenti è un rombo.

Teorema 5.2
Un parallelogramma è un rombo se è verificata una delle seguenti condizioni:
 a. Le diagonali sono perpendicolari
 b. Una diagonale è bisettrice di un angolo interno del parallelogramma

Non ti fornisco la dimostrazione del teorema prova a produrla da solo.

Quadrato

Definizione

Un **quadrato** è un quadrilatero avente tutti gli angoli retti e tutti i lati congruenti

Il quadrato è:

- Un rombo perché ha i lati tutti congruenti tra loro
- Un rettangolo perché ha tutti gli angoli retti

Teorema 5.3

Un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari e bisettrici degli angoli interni.

Dalla definizione di quadrato si può già dedurre una prima condizione per affermare che un quadrilatero sia un quadrato.

Un quadrilatero avente tutti i lati congruenti e tutti gli angoli retti è un quadrato.

Teorema 5.4

Un parallelogramma è un quadrato se è verificata una delle seguenti condizioni:
- **a. Le diagonali sono congruenti e perpendicolari**
- **b. Le diagonali sono congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo interno del parallelogramma**

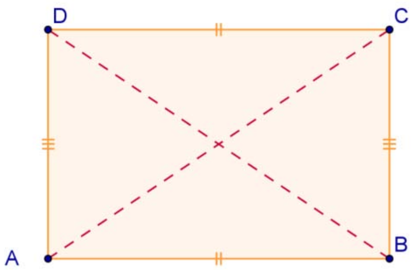
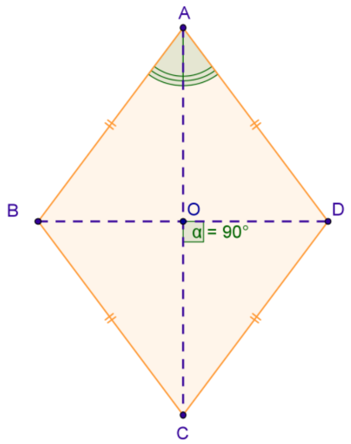
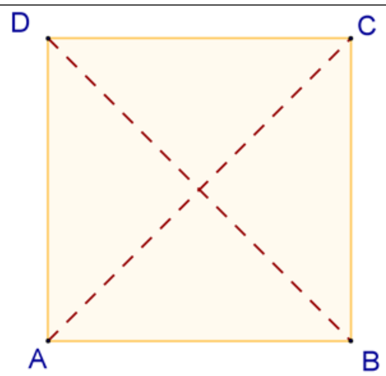
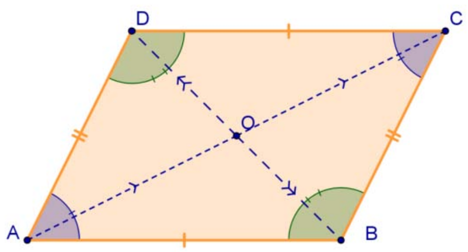
Mettiti alla prova

Prova a dimostrare i due teoremi seguendo i suggerimenti:

- **a.** per il **teorema 5.3** è sufficiente che utilizzi le proprietà del rombo e del rettangolo
- **b.** per il **teorema 5.4** devi verificare che è rombo e un rettangolo, utilizzando le condizioni sufficienti già dimostrate.

Verifica se hai compreso

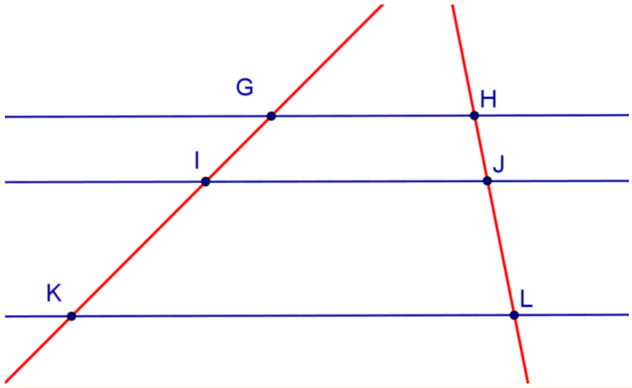
Associa ad ogni parallelogramma la proprietà che lo caratterizza.

Parallelogramma	Proprietà
	Le diagonali si incontrano nel punto medio e non sono congruenti
	Le diagonali sono congruenti e bisettrici degli angoli
	Le diagonali sono bisettrici degli angoli e perpendicolari tra loro.
	Le diagonali sono congruenti

La corrispondenza di Talete

Due o più rette parallele formano un **fascio improprio** di rette e una retta t che interseca una del fascio le interseca tutte ed è detta **trasversale.**
Consideriamo un fascio di rette parallele e due trasversali t e s. I punti in cui tali rette intersecano le parallele vengono detti **corrispondenti**.

G e H sono corrispondenti, I e J sono corrispondenti ecc.…



Definizione

Si definisce **corrispondenza di Talete** , la corrispondenza biunivoca che associa ad ogni punto di una trasversale t il punto corrispondente sulla trasversale s.

Teorema di Talete

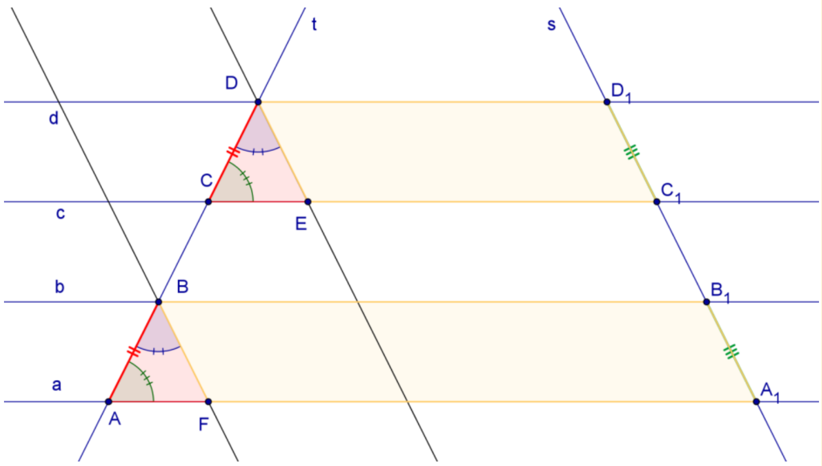
Dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali t e s, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull' altra trasversale.

Ip.

a//b//c//d

$AB \cong CD$

Ts.
$A_1B_1 \cong C_1D_1$



Dimostrazione

Costruiamo da B e D due rette parallele alla retta s, che incontrano rispettivamente la retta a in F e la retta c in E.
Consideriamo i due triangoli AFB e DCE, essi hanno:

$AB \cong CD$ per ipotesi
$\widehat{BAF} \cong \widehat{DCE}$ perché corrispondenti rispetto alle rette parallele c e a tagliate dalla trasversale t
$\widehat{FBA} \cong \widehat{EDC}$ perché corrispondenti rispetto alle rette parallele BF e DE tagliate dalla trasversale t.

I due triangoli sono congruenti per il II criterio di congruenza. Possiamo dedurre che $BF \cong DE$.
Consideriamo i parallelogrammi DEC_1D_1 e BFA_1B_1, i lati opposti sono congruenti, quindi
$A_1B_1 \cong BF$ e $DE \cong C_1D_1$ e per transitività $A_1B_1 \cong C_1D_1$

Corollario

La parallela tracciata dal punto medio di un lato di un triangolo ad uno degli agli altri due lati incontra il terzo lato nel suo punto medio.

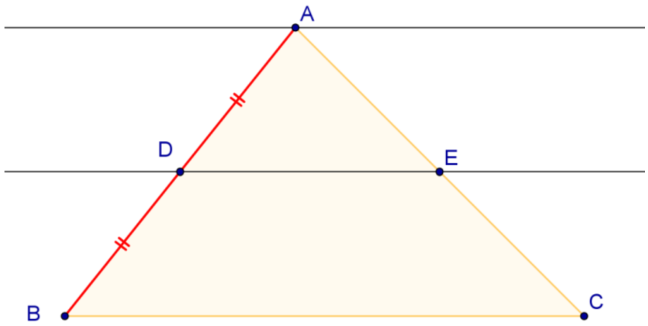
Ip.

$BD \cong DA$

DE//BC

Ts.

$AE \cong EC$



Dimostrazione

Mandiamo da A una parallela al lato DE, otteniamo un fascio di rette parallele tagliate dalle trasversali AB e AC.
Per il Teorema di Talete essendo per ipotesi $BD \cong DA$ segue che $AE \cong EC$.

Mettiti alla prova

Dimostra il seguente teorema:

Teorema 5.4

Il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà

HAI IMPARATO ...

1. a definire un trapezio
2. a definire un parallelogramma
3. le proprietà dei parallelogrammi particolari
4. La corrispondenza di Talete

LE ISOMETRIE

PREREQUISITI
Criteri di congruenza dei triangoli
Rette parallele e perpendicolari
Il concetto di funzione e di funzione biunivoca

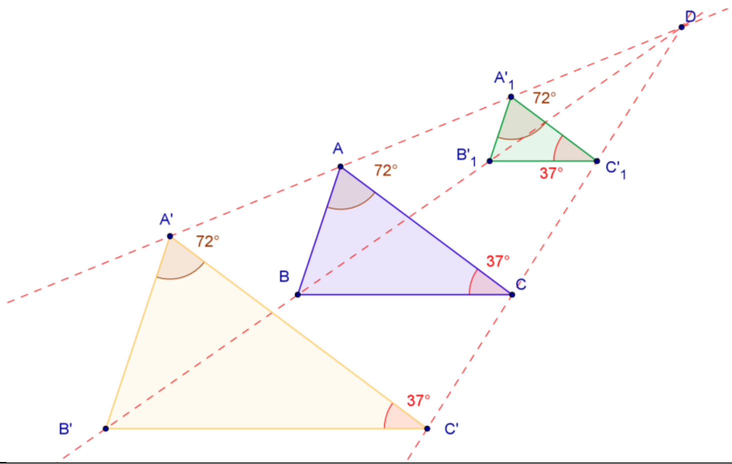
OBIETTIVI

Sapere
Saper definire una trasformazione geometrica
Sapere definire le particolari isometrie e le loro proprietà

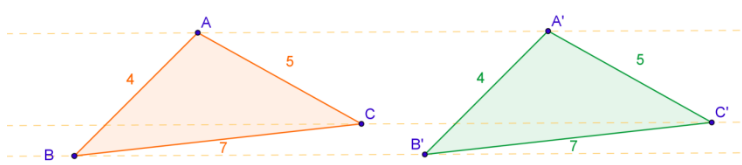
Saper fare
Saper determinare la figura isometrica di una data
Saper riconoscere se una figura ha centri di simmetria o assi di simmetria

Trasformazioni geometriche

Osserva queste immagini



I tre triangoli hanno gli stessi angoli, ma non le stesse misure.
Possiamo affermare che:
al triangolo ABC corrisponde il triangolo $A'B'C'$;
al triangolo ABC corrisponde il triangolo $A_1B_1C_1$;



I due triangoli hanno gli stessi lati e gli stessi angoli.
Possiamo affermare che:
al triangolo ABC corrisponde il triangolo $A'B'C'$

Ma che significato ha "al triangolo ABC corrisponde il triangolo $A'B'C'$ "?
Vuol dire che esiste una trasformazione del piano che fa corrispondere al triangolo ABC il triangolo A'B'C'.

Definizione

Si chiama **trasformazione** una corrispondenza biunivoca del piano che fa corrispondere ad un punto P la sua immagine P'.

Le trasformazioni si distinguono in base alle **proprietà invarianti** delle figure trasformate.

Definizione

Si dice che una proprietà è **invariante** di una trasformazione se, ogni figura che gode di alcune proprietà, anche la sua trasformata gode delle medesime proprietà.

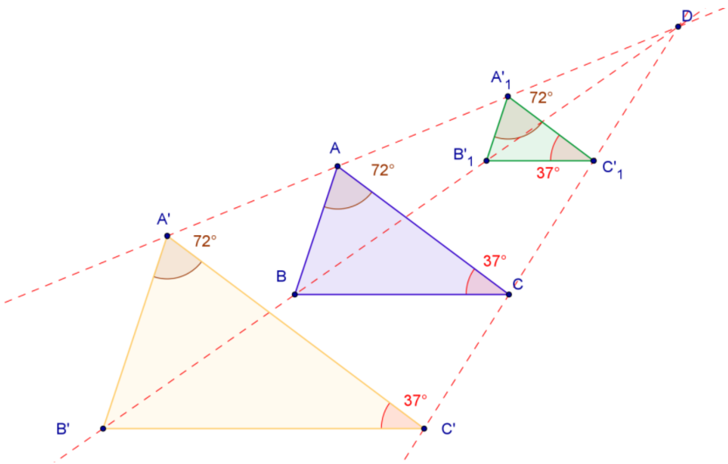
Rianalizziamo le immagini precedenti:

I triangoli hanno come proprietà invarianti

- Gli angoli
- Il parallelismo

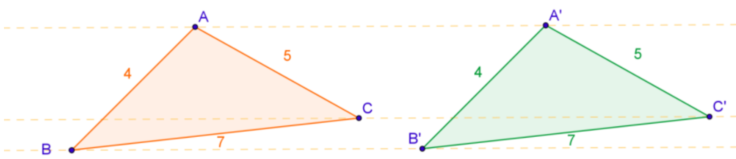
Tale trasformazione si chiama **omotetia**

I segmenti stanno tra loro in un rapporto $\frac{AB}{A'B'} = k$



I triangoli hanno come proprietà invarianti

- Gli angoli
- le misure dei lati, quindi la distanza tra due punti



Tale trasformazione è detta **isometria**
Due figure F ed F' sono isometriche, se sono congruenti.
Una proprietà che non è sempre invariante è l' orientamento dei punti

Essendo una trasformazione del piano una corrispondenza biunivoca esiste la sua inversa, che è una trasformazione. L' inversa di una funzione f si indica con f^{-1}.
Una trasformazione può essere applicata ad una figura F più volte.
Nel caso in cui la trasformazione viene applicata due volte e riotteniamo la figura di partenza, si definisce **involutoria** e si dice che la trasformazione coincide con la trasformazione **identica**.

f(P)=P' e f(P')=P

In una trasformazione ci possono essere punti o figure che trasformate sono sé stesse e sono chiamati **elementi uniti** di una trasformazione.

Corrispondenza Biunivoca

Dati due insiemi A e B, una corrispondenza f:A→ B si dice biunivoca se ad ogni elemento di A corrisponde uno ed uno solo elemento di B

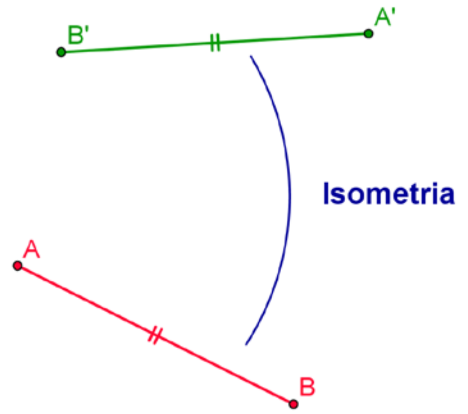
Isometrie

Definizione

Si definisce **isometria** una particolare trasformazione che: dato nel piano un segmento AB fa corrispondere
- al punto A il punto A',
- al punto B il punto B'
- al segmento AB il segmento A'B' congruente ad AB

Tale trasformazione ha come proprietà invarianti
- La distanza tra due punti;
- Gli angoli;
- Il parallelismo;

Trasforma:
- Rette in rette
- rette parallele in rette parallele;
- rette incidenti in rette incidenti;

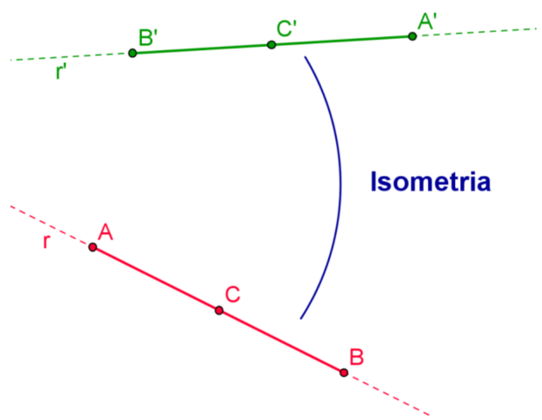


Teorema 5.5

Un' isometria trasforma rette in rette

Ip.
r una retta e f una isometria

Ts.
f(r) è una retta



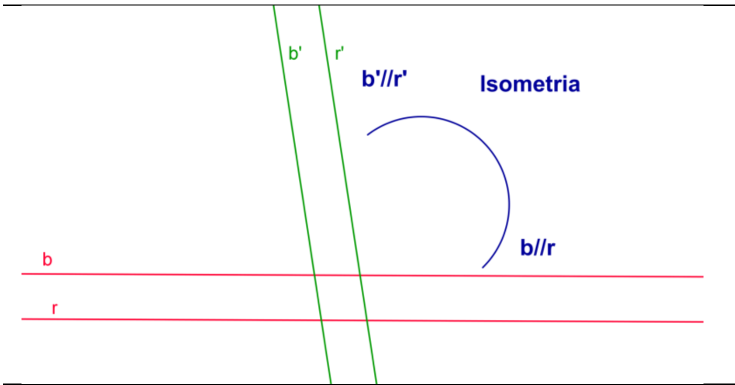
Dimostrazione

Consideriamo sulla retta r tre punti A,B,C, con C compreso tra A e B.
Per somma di segmenti sappiamo che:

$AC + CB = AB$
Se applichiamo un' isometria ai punti A, B'e C otterremo per definizione di isometria

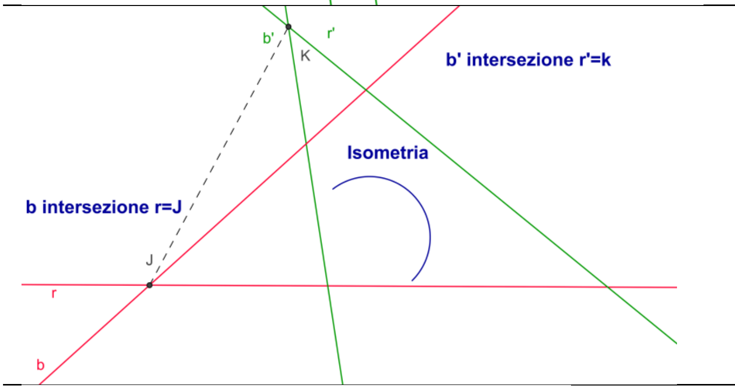
$AB \cong A'B', CB \cong C'B', AB \cong A'B'$, quindi $A'C' + C'B' = A'B'$

Possiamo quindi concludere che A', B', e C' sono allineati (in caso contrario varrebbe la disuguaglianza triangolare), quindi un' isometria trasforma rette in rette.



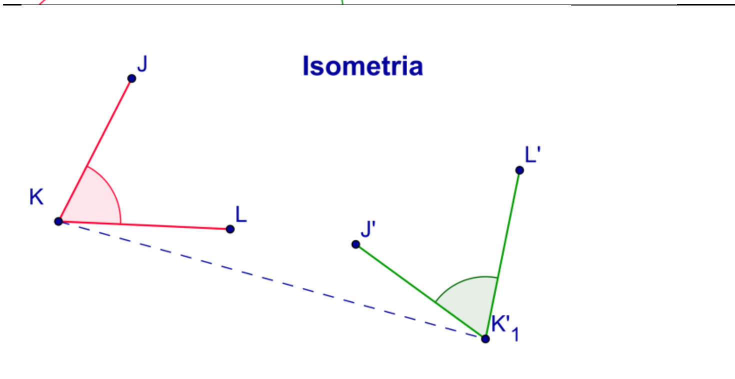
Teorema 5.6

Una isometria trasforma rette parallele in rette parallele



Teorema 5.7

Una isometria trasforma rette incidenti in rette incidenti



Teorema 5.7

Una isometria trasforma un angolo in un angolo. I lati e il vertice dell' angolo dato sono le immagini dei lati e del vertice dell' angolo dato

Teorema 5.8

Una isometria trasforma un angolo in un angolo ad esso congruente.

Conseguenza dell' ultimo teorema è il seguente teorema

Teorema 5.9

Una isometria trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari.

Riassumendo

Le proprietà invarianti di una isometria sono:

L'allineamento dei punti
L' incidenza tra rette
Il parallelismo tra rette
La lunghezza dei segmenti
L' ampiezza degli angoli

Mettiti alla prova

Di ogni proposizione indica se è vera o falsa

Proposizione	Vera	Falsa
In una isometria due rette parallele si trasformano in rette incidenti		
In una trasformazione isometrica un triangolo ABC ha come immagine un triangolo A'B'C' ad esso congruente		
In una trasformazione isometrica a due rette perpendicolari corrispondono rette perpendicolari		
In una trasformazione isometrica l' angolo ABC si trasforma nell' angolo A'B'C', mantenendo invariato l' orientamento		
In una trasformazione isometrica il perimetro di un poligono P è uguale al perimetro del poligono P' trasformato di P		
In una trasformazione isometrica l' area di un poligono P non è uguale all' area del poligono P' trasformato di P		
In una trasformazione isometrica rette incidenti hanno come immagine rette incidenti		

Simmetria Assiale

Definizione

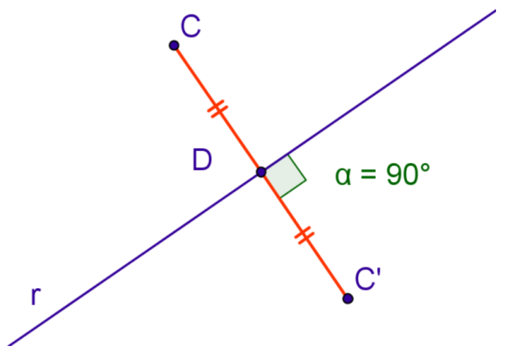
Si definisce **Simmetria Assiale** una trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto C del piano il suo simmetrico C' rispetto ad una retta fissa r detta **Asse di Simmetria**.

I punti C e C' si dicono **simmetrici** e la retta **r** è l' **asse del segmento CC'**.

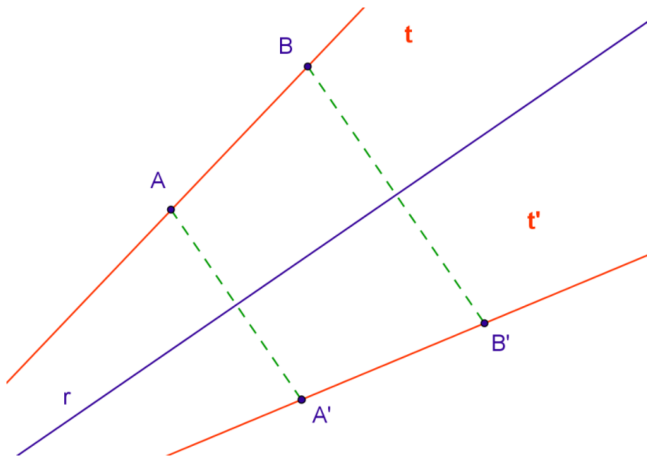
Se il punto $C \in r$ il suo simmetrico è se stesso.

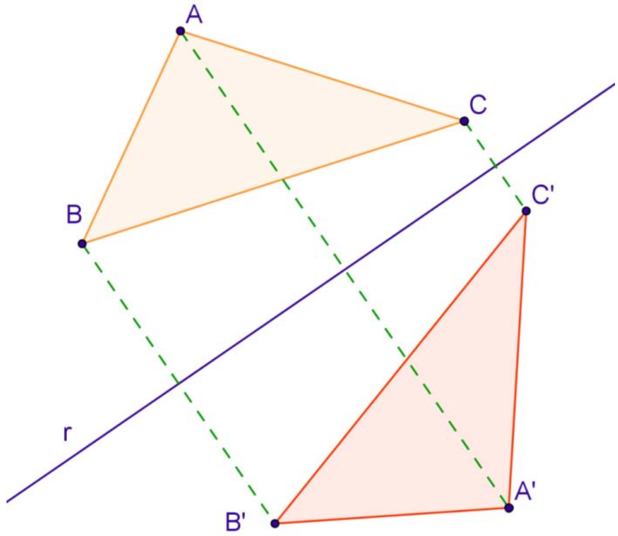
Per costruire il simmetrico di un punto $C \notin r$ si proietta il punto C sulla retta r. Sia D la sua proiezione. Si considera il prolungamento di CD dalla parte di D e si prende il punto C' tale che $CD \cong C'D'$

La simmetria si indica solitamente con $\mathbf{s_r}$



Esempi di costruzione di figure simmetriche rispetto ad una retta r





Per costruire la retta simmetrica di rispetto ad r, si procede nel seguente modo:

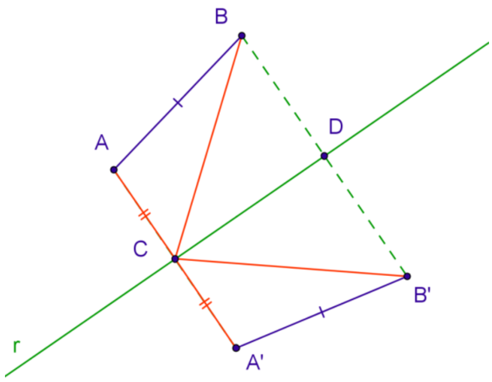
- si scelgono due punti A e B sulla retta t
- si determinano i simmetrici di tali punti rispetto ad r, A' e B'
- si congiungono i punti ottenuti e si trova la retta t' simmetrica di t rispetto ad r

Per costruire la figura simmetrica, ad esempio, di un triangolo ABC rispetto ad una retta r, si procede nel seguente modo:

- si costruiscono i simmetrici A', B', C' di A,B e C rispetto ad r
- si congiungono tali punti e si ottiene il triangolo A'B'C' simmetrico di ABC rispetto ad r

Teorema 6.0

Qualsiasi simmetria assiale è una isometria



Ip.
Segmento AB e retta r

Ts
$AB \underset{s_r}{\rightarrow} A'B'$
$AB \cong A'B'$

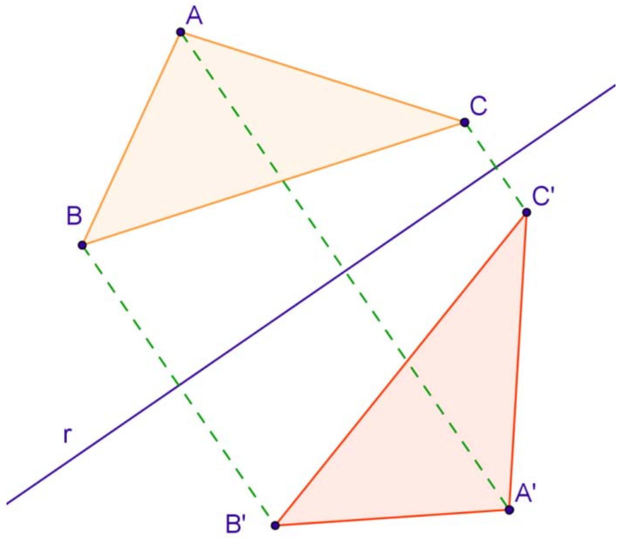
Dimostrazione

Sia A' il simmetrico di A rispetto ad r e C l' intersezione di AA' con r.
Sia B' il simmetrico di B rispetto ad r e D l' intersezione di BB' con r. I triangoli rettangoli BCD e B'CD sono congruenti perché hanno:
CD in comune e $BD \cong DB'$
Conseguentemente $BC \cong B'C'$
Consideriamo i due triangoli ABC e $A'B'C'$, essi hanno:
$BC \cong B'C'$ per dimostrazione precedente
$AC \cong A'C$ per simmetria assiale
$\widehat{ACB} \cong \widehat{B'CA'}$ perché complementari di angoli congruenti
I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza, conseguentemente $AB \cong A'B'$.

Le **proprietà invarianti** di una simmetria assiale sono:

L'allineamento dei punti
L' incidenza tra rette
Il parallelismo tra rette
La lunghezza dei segmenti
L' ampiezza degli angoli

La simmetria assiale non conserva l' orientamento delle figure come avrai già notato.



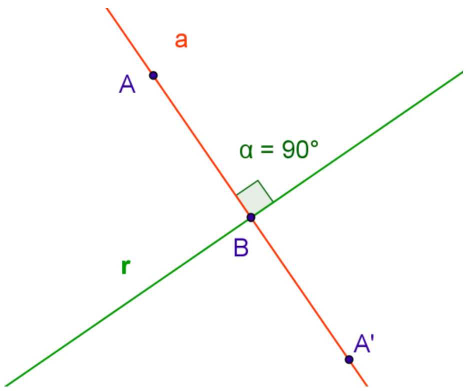
Leggiamo il triangolo ABC, partendo dal vertice A verso B e poi verso C. Ci siamo mossi in senso antiorario.

Leggiamo il triangolo A'B'C', partendo dal vertice A' simmetrico di A, verso B' e poi verso C'. Ci siamo mossi in senso orario.

Elementi uniti di una simmetria assiale sono:

- i punti appartenenti all' asse di simmetria
- le rette perpendicolari all' asse di simmetria

Rammenta che le rette perpendicolari all' asse di simmetria sono rette unite ma non è composta da punti uniti, cioè ogni punto appartenente a tale retta ammette un simmetrico distinto da sé stesso.



Mettiti alla prova

Individua le risposte corrette.

1. Una simmetria assiale trasforma
- ☐ Una retta r in una retta t parallela ad r
- ☐ Un angolo α in un angolo β ad esso congruente
- ☐ Rette parallele in rette parallele
- ☐ Un segmento AB in un segmento A'B' ad esso congruente
- ☐ Rette incidenti in rette parallele

Completa le seguenti frasi scegliendo tra i termini consigliati

2. Una Simmetria .... è una trasformazione .... che fa corrispondere ad ogni .... del piano il suo simmetrico rispetto ad una retta r detta .... di Simmetria.

Termini consigliati
Centrale, assiale, isometrica, omotetica, figura, punto, asse, perpendicolare

Figure con asse di simmetria

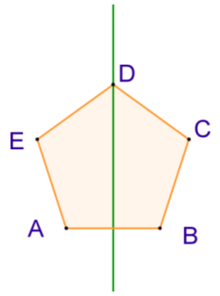
Definizione

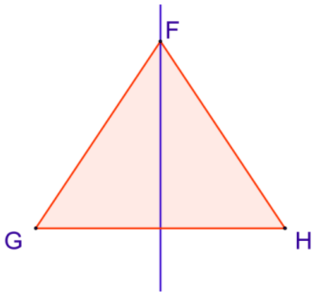
Una figura **unita** rispetto ad un asse di simmetria r , si dice simmetrica rispetto ad r. La retta r è detta **asse di simmetria della figura**.

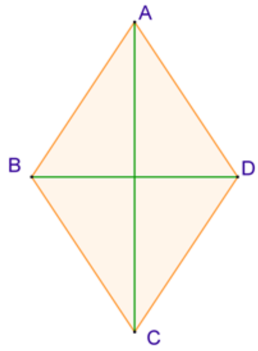
Figure che non hanno assi di simmetria sono ad esempio, il triangolo scaleno e il parallelogramma.

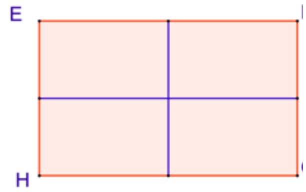
Figure che hanno un asse di simmetria sono ad esempio, il deltoide (quadrilatero con due coppie di lati consecutivi congruenti), il trapezio isocele...
Di seguito ti propongo alcune figure con assi di simmetria.

Esempi di alcune figure geometriche che ammettono assi di simmetria



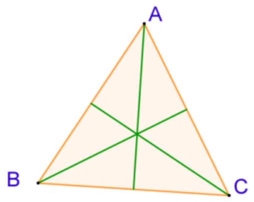


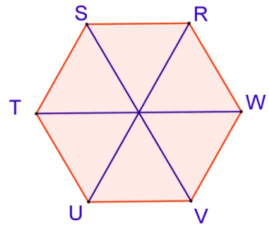


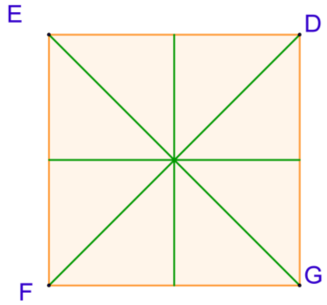


Il pentagono ed il triangolo isoscele hanno solo un asse di simmetria

Il rombo e il rettangolo hanno due assi di simmetria

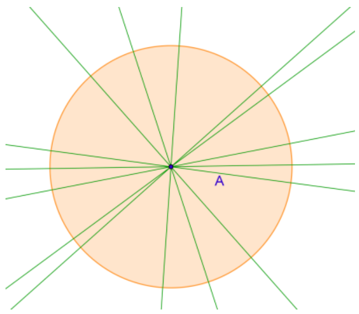






L'esagono e il triangolo equilatero hanno 3 assi di simmetria.

Il quadrato ha 4 assi di simmetria

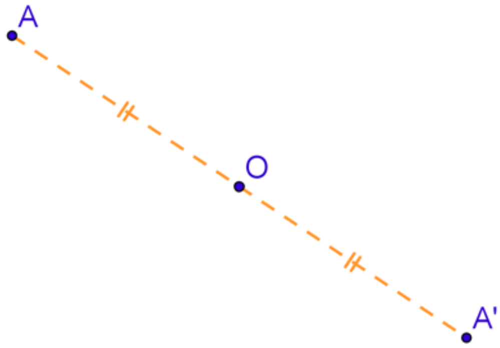


La circonferenza ha infiniti assi di simmetria, i diametri

Simmetria Centrale

Definizione

Si definisce **Simmetria Centrale** una trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto A del piano il suo simmetrico A' rispetto ad un punto fisso O detto **Centro di Simmetria**, dove O è il punto medio del segmento AA'.



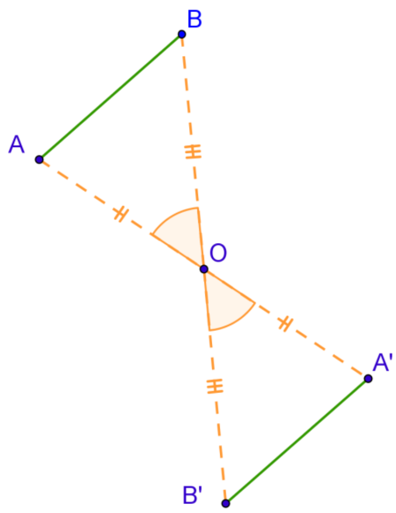
I punti A e A' si dicono simmetrici l' uno dell' altro rispetto al punto O .

Il centro di simmetria O è l' unico punto simmetrico di sé stesso, cioè l' unico punto unito. Tutte le rette passanti per il centro di simmetria sono rette unite ma, non composte da punti uniti. La simmetria centrale si indica s_O

Per costruire il simmetrico di A rispetto ad O si costruisce la semiretta con origine in A passante per O e si prende un punto A' tale che $OA' \cong OA$.

Teorema 6.1

Qualsiasi simmetria centrale è una isometria.



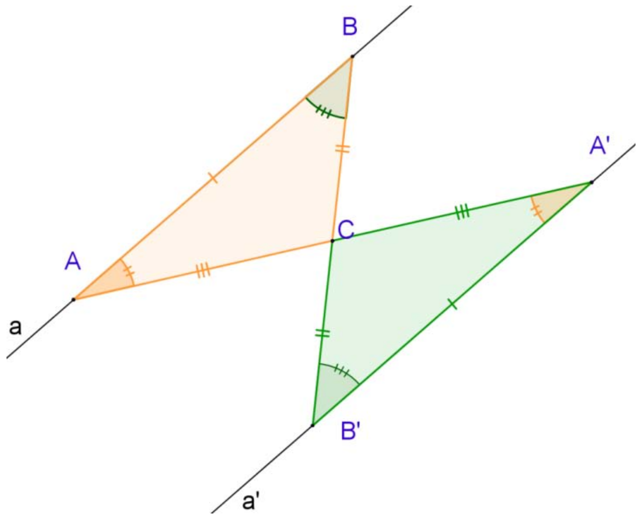
Ip.
$A \underset{s_O}{\rightarrow} A'$
$B \underset{s_O}{\rightarrow} B'$
Ts.
$AB \cong A'B'$

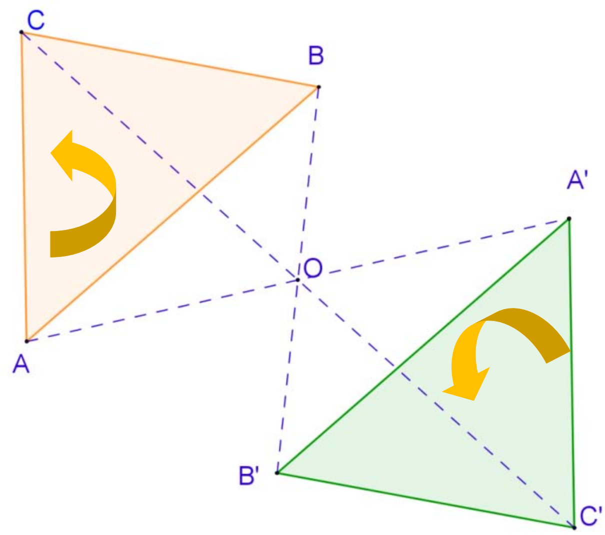
Dimostrazione
Consideriamo i due triangoli AOB e A'OB', essi hanno:
$AO \cong A'O$ per ipotesi
$BO \cong B'O$ per ipotesi
$\widehat{AOB} \cong \widehat{A'OB'}$ perché opposti al vertice

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza conseguentemente hanno $AB \cong A'B'$.

Le **proprietà invarianti** di una simmetria centrale sono:

L'allineamento dei punti
L' incidenza tra rette
Il parallelismo tra rette
La lunghezza dei segmenti
L' ampiezza degli angoli
Le direzioni, cioè una retta viene trasformata in una parallela
L' orientamento dei punti





La retta a sostegno di AB viene trasformata nella retta a' sostegno di A'B' e parallela ad a.

Entrambi i triangoli percorsi a partire da A e da A' verso B e B? lo sono in senso orario.

Figure con centro di simmetria

Definizione

Una figura **unita** rispetto ad un centro di simmetria O , si dice simmetrica rispetto ad O. Il punto O è detto **centro di simmetria della figura**.

Figure che non hanno assi di simmetria sono ad esempio, il triangolo scaleno, il pentagono, cioè tutte le figure composte da un numero dispari di vertici.

Figure con un centro di simmetria sono i parallelogrammi (il centro di simmetria è il punto d' incontro delle diagonali) e la circonferenza (il centro di simmetria è il centro della circonferenza).

Una figura avente infiniti centri di simmetria è la retta, infatti ogni suo punto è un centro di simmetria.

Mettiti alla prova

Individua le risposte corrette.

1. **Una simmetria centrale trasforma**
- ☐ Una retta r in una retta t parallela ad r
- ☐ Un angolo α in un angolo β ad esso congruente
- ☐ Un segmento AB in un segmento A'B' ad esso congruente
- ☐ una figura F in un' altra F' e mantiene l' orientamento dei punti

Completa le seguenti frasi scegliendo tra i termini consigliati

2. Una Simmetria .... è una trasformazione .... che fa corrispondere ad ogni .... del piano il suo simmetrico rispetto ad un punto detto .... di Simmetria.

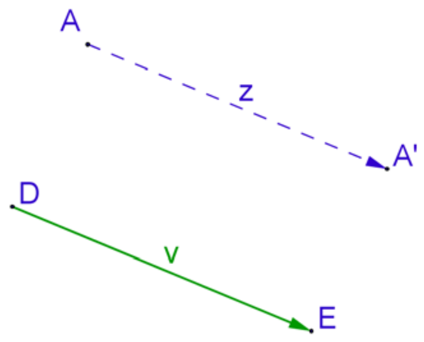
Termini consigliati
Centrale, assiale, isometrica, omotetica, figura, punto, asse, perpendicolare, centro

Traslazione

Definizione

Si definisce **Traslazione di vettore $\vec{v}$** una trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto A del piano il suo traslato A', tale che $\overrightarrow{AA'}$ ha la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo di $\vec{v}$.

La traslazione si indica $t_{\vec{v}}$

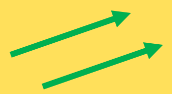


Vettori

*Si definisce **vettore** un segmento orientato, caratterizzato da:*
- *Una lunghezza, detta **modulo** del vettore*
- *Una direzione*
- *Un verso*

Vettori Equipollenti

*Due vettori aventi stessa direzione, stesso verso e stesso modulo si dicono **equipollenti***

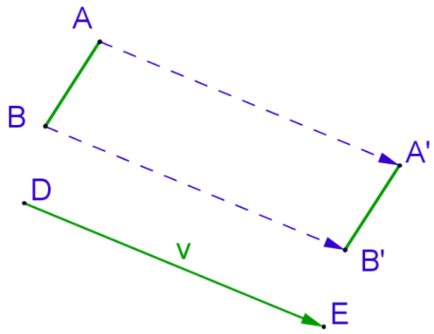


Teorema 6.2

Qualsiasi traslazione è una isometria.

Ip.

AB e una traslazione $t_{\vec{v}}$



Ts.

$AB \cong A'B'$

Dimostrazione

I segmenti orientati AA' e BB' hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza del vettore $\vec{v}$. Possiamo quindi affermare che AA'//BB e $AA' \cong BB'$. Il quadrilatero ABB'A' è un parallelogramma perché ha due lati opposti paralleli e congruenti quindi, $AB \cong A'B'$.

Le **proprietà invarianti** di una traslazione sono:

L'allineamento dei punti
L' incidenza tra rette
Il parallelismo tra rette
La lunghezza dei segmenti
L' ampiezza degli angoli
Le direzioni
L' orientamento dei punti

Non esistono punti uniti in una traslazione ma, solo rette unite. Tali rette unite sono tutte quelle che hanno la stessa direzione e verso del vettore $\vec{v}$. Tali rette non sono composte da punti uniti.

Mettiti alla prova

Individua le risposte corrette.

1. Una traslazione trasforma
- ☐ Una retta r in una retta t parallela ad r
- ☐ Un angolo α in un angolo β ad esso congruente
- ☐ Un segmento AB in un segmento A'B' ad esso congruente
- ☐ una figura F in un' altra F' e non mantiene l' orientamento dei punti
- ☐ rette incidenti in rette parallele
- ☐ una figura F in un' altra F' e mantiene l' orientamento dei punti

Completa le seguenti frasi scegliendo tra i termini consigliati

2. Una Traslazione è una trasformazione .... che fa corrispondere ad ogni triangolo ABC del piano un triangolo A'B'C' .... ad ABC. I lati dei due triangoli sono tra loro .... e si mantiene .... dei punti

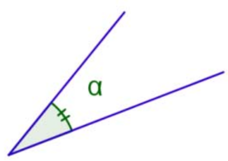
Termini consigliati
Congruente, assiale, isometrica, paralleli, figura, punto, orientamento, perpendicolare,

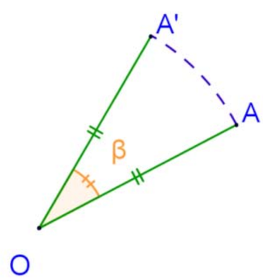
Rotazione

Definizione

Si definisce **Rotazione** una trasformazione individuata da un centro di rotazione e da un angolo di rotazione che associa ad un punto A il punto A' che soddisfa le seguenti condizioni:
- $\widehat{AOA'}$ è orientato in modo che abbia la stessa ampiezza dell' angolo di rotazione, lo stesso orientamento e OA come primo lato
- $AO \cong OA'$

Possiamo affermare che una rotazione è ottenuta una volta stabilito l' **angolo di rotazione**.
L' ampiezza dell' angolo di rotazione determina il verso di rotazione. I numeri reali positivi determinano angoli positivi (+15°, +215°...) e numeri reali negativi determinano angoli negativi (-35°, -135°...)





- **Angolo positivo verso antiorario**
- **Angolo negativo verso orario**

Se l' angolo di rotazione è 180° la rotazione coincide con una simmetria centrale avente come centro quello di rotazione.

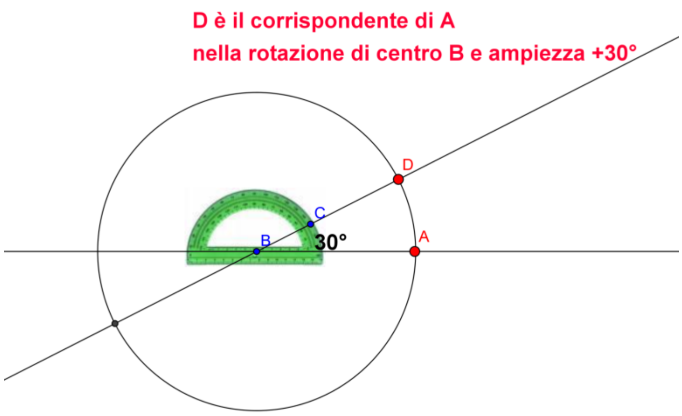
La rotazione è una trasformazione isometrica avente come unico punto unito il centro di rotazione e, non ammette rette unite.

Le **proprietà invarianti** di una rotazione sono:

L'allineamento dei punti
L' incidenza tra rette
Il parallelismo tra rette
La lunghezza dei segmenti
L' ampiezza degli angoli
L' orientamento dei punti

Costruzione con compasso e goniometro

Disegniamo una retta passante per B, centro di rotazione, e A.
Poniamo il goniometro con centro coincidente con B e indichiamo con C il punto corrispondente all' angolo di rotazione (nell' esempio è di 30°).
Congiungiamo B con C. Disegniamo una circonferenza con centro in B e raggio AB,
Il punto d' intersezione tra la circonferenza e la retta è il punto D, corrispondente di A nella rotazione di 30°



Mettiti alla prova

Proposizione	Vera	Falsa
In una rotazione due rette parallele si trasformano in rette incidenti		
In una rotazione un triangolo ABC ha come immagine un triangolo A'B'C' ad esso congruente		
In una rotazione a due rette perpendicolari corrispondono rette perpendicolari		
In una rotazione un angolo ABC si trasforma nell' angolo A'B'C', mantenendo invariato l' orientamento		
In una rotazione il perimetro di un poligono P è uguale al perimetro del poligono P' trasformato di P		
In una rotazione area di un poligono P non è uguale all' area del poligono P' trasformato di P		
In una rotazione rette incidenti hanno come immagine rette incidenti		
Una rotazione è determinata solo da una direzione		
Una rotazione è la composizione di due simmetrie assiali ad assi perpendicolari		
Una rotazione è determinata da una direzione, verso e lunghezza		

.

HAI IMPARATO CHE ...

1. cos'è una trasformazione geometrica
2. cos'è una isometria
3. esistono particolari isometrie: Simmetrie Assiali, Simmetrie Centrali, Traslazioni, Rotazioni
4. cosa sono le proprietà invarianti di una trasformazione

La circonferenza e i Poligoni inscritti e circoscritti

LA CIRCONFERENZA

PREREQUISITI
Criteri di congruenza dei triangoli
Rette parallele e perpendicolari

OBIETTIVI

Sapere
Saper definire un luogo geometrico
Saper definire la circonferenza
Conoscere le proprietà della circonferenza

Saper fare
Saper riconoscere un luogo geometrico
Saper enunciare e dimostrare i principali luoghi geometrici
Saper enunciare e dimostrare i teoremi fondamentali sulla circonferenza
Saper dimostrare teoremi utilizzando le proprietà studiate

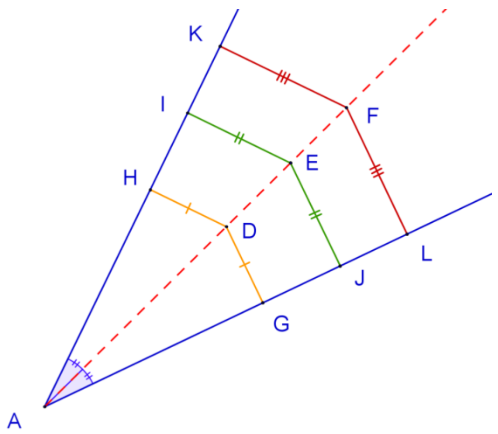
Luoghi geometrici noti

Definizione

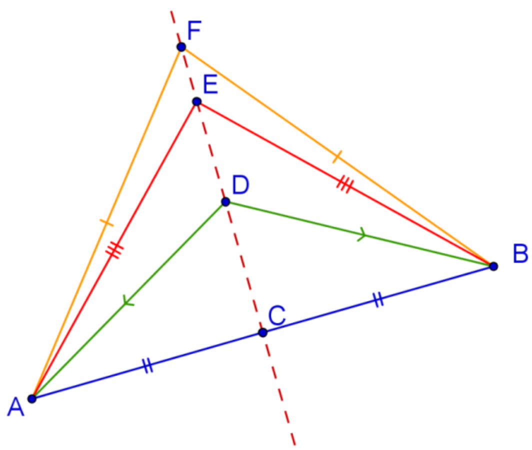
Si definisce **luogo geometrico** l' insieme di tutti i punti del piano che godono di una medesima proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo.

Per verificare se una figura è un luogo geometrico basta dimostrare che:
- Ogni punto della figura gode della medesima proprietà,
- Un punto appartiene alla figura se gode della proprietà comune a tutti i suoi punti

Tra i luoghi geometrici ci sono:



Bisettrice di un angolo
E' il luogo dei punti del piano equidistanti dai lati dell' angolo



Asse di un segmento
E' il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento

Dimostriamo queste due proprietà rammentando che, per la definizione data di luogo, dobbiamo dimostrare che:

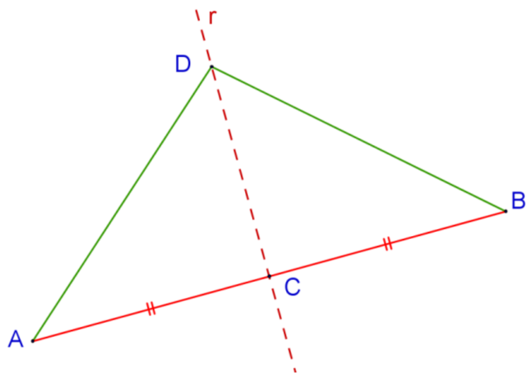
- Ogni punto della figura gode della medesima proprietà,
- Un punto appartiene alla figura se gode della proprietà comune a tutti i suoi punti

Teorema 6.3

L' asse di un segmento è il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi di un segmento

Verifichiamo che scelto un punto D appartenente all' asse del segmento AB, la sua distanza da A e da B è congruente.

Ip.
r asse del segmento AB
$AC \cong CB$
$D \in r$
Ts.
$AD \cong DB$



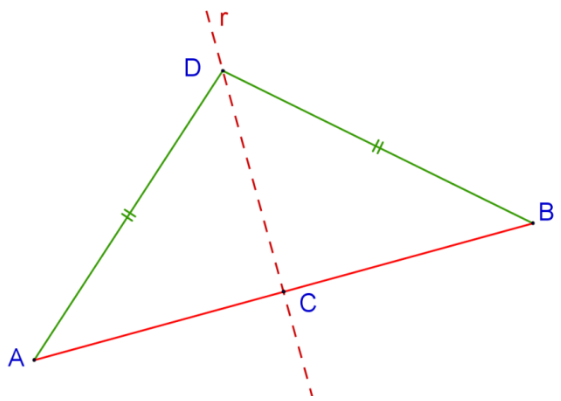
Dimostrazione
Consideriamo il segmento AB e il suo punto medio C.
Disegniamo l' asse del segmento AB passante per C.
Prendiamo sull' asse un punto D e congiungiamolo con A e B.
Consideriamo i due triangoli rettangoli ACD e BCD. Essi hanno:

- AC ≅ BC per costruzione
- DC in comune

I due triangoli sono congruenti, conseguentemente $AD \cong DB$, quindi D è equidistante dagli estremi del segmento AB.

Verifichiamo che dato un segmento AB e un punto D del piano tale che AD è congruente a DB, allora D appartiene all' asse del segmento AB.

Ip.
$AD \cong DB$
Ts.
r asse del segmento AB
$AC \cong CB$



Dimostrazione

Sappiamo che DA ≅ DB. Prendiamo il punto medio C di AB e congiungiamo D con C.
Consideriamo i due triangoli CAD e BCD.
Essi hanno

- DB ≅ DA per ipotesi
- DC in comune
- AC ≅ BC per costruzione

Per il III criterio di congruenza tra triangoli ,$ACD \cong DCB$ e conseguentemente gli angoli $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$ sono congruenti. Tali angoli sono anche supplementari quindi sono retti.
Possiamo dedurre che DC è asse del segmento AB

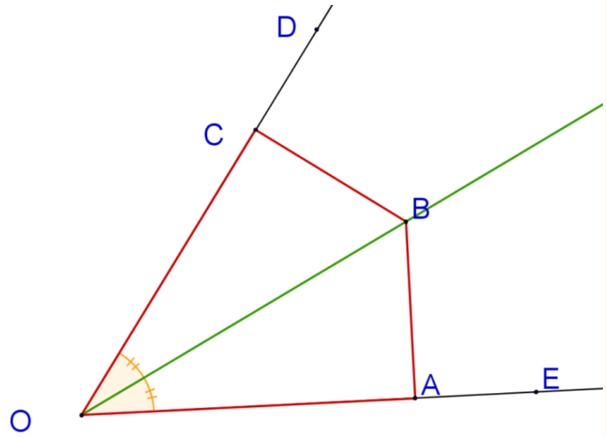
Teorema 6.4

La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti del piano equidistanti dai lati dell' angolo

Verifichiamo che preso un punto a scelta B appartenente alla bisettrice dell' angolo COA, è equidistante dai lati dell' angolo.

Ip:
$\widehat{COB} \cong \widehat{BOA}$

Ts
$BA \cong BC$



Dimostrazione

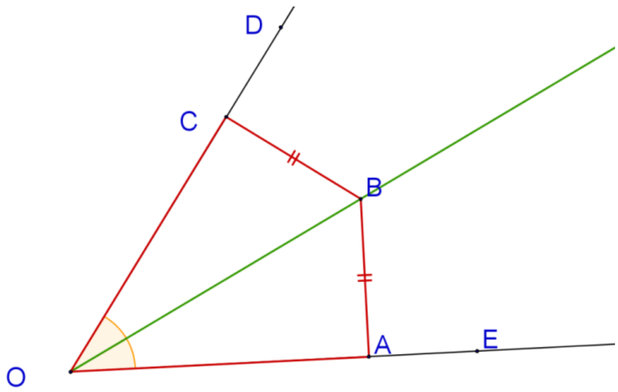
Scelto il punto B appartenente alla bisettrice dell' angolo $\widehat{DOE}$, proiettiamo B sui lati dell' angolo e siano A e C le sue proiezioni.
Consideriamo i due triangoli rettangoli BAO e BOC , sono congruenti perché hanno
- OB in comune
- L' angolo $\widehat{COB} \cong \widehat{BOA}$ per ipotesi

Conseguentemente $BA \cong BC$. Possiamo dedurre che i punti appartenenti alla bisettrice di un angolo sono equidistanti dai suoi lati

Verifichiamo che se un punto B interno ad un angolo AOC è equidistante dai suoi lati, appartiene alla sua bisettrice

Ip.
$BA \cong BC$

Ts.
$\widehat{COB} \cong \widehat{BOA}$



Dimostrazione

Consideriamo il punto B, interno all' angolo $\widehat{AOC}$, tale che $BA \cong BC$

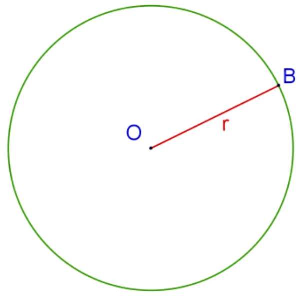
Congiungiamo B con O. Consideriamo i due triangoli rettangoli BOC e BOA. Essi hanno:
$BA \cong BC$ per ipotesi
OB in comune
I due triangoli sono congruenti, conseguentemente hanno l' angolo $\widehat{COB} \cong \widehat{BOA}$
Possiamo dedurre che OB è la bisettrice dell' angolo $\widehat{AOC}$.

La circonferenza e le sue proprietà

Definizione

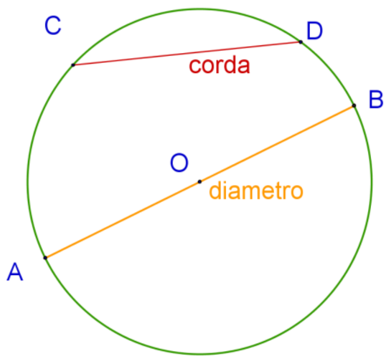
La **circonferenza** è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto **Centro**.

La distanza del centro della circonferenza da un punto appartenente ad essa è detta **raggio**.



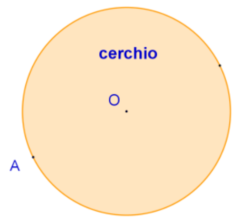
E' detto **diametro** qualsiasi segmento passante per il centro della circonferenza e avente gli estremi sulla circonferenza.
Il diametro è il doppio del raggio della circonferenza e, inoltre, tutti i diametri sono congruenti tra loro.

E' detta **corda** il segmento che unisce due punti qualsiasi appartenenti alla circonferenza.
Il segmento CD è una corda della circonferenza



Definizione

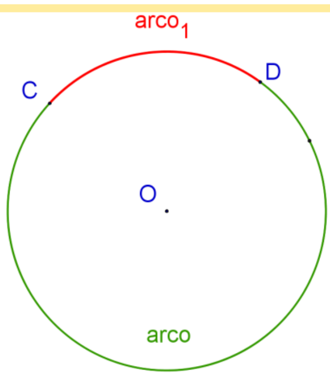
Il **cerchio** è la parte di piano compresa tra la circonferenza e i suoi punti interni

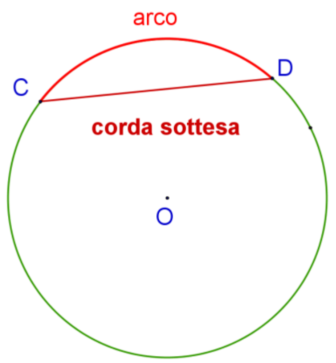


La parte della circonferenza compresa tra C e D è detto **arco** .

Definizione

Si definisce **arco** una parte di circonferenza compresa tra due suoi punti, detti **estremi** dell' arco.





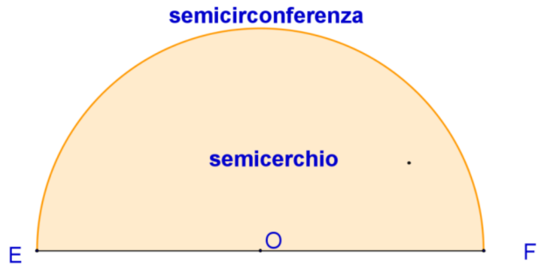
Una corda sottende ciascuno dei due archi aventi gli stessi estremi della corda.

La parte di cerchio limitata dall' arco e dalla corda sottesa si chiama **segmento circolare.**

Definizione

Si definisce **semicirconferenza** l' arco avente come estremi quelli di un diametro.

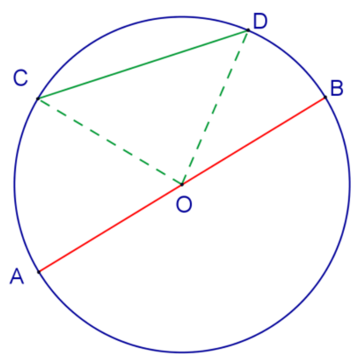
La parte di paino delimitata dalla semicirconferenza e dai suoi punti interni è detta **semicerchio**.



Proprietà delle corde e dei diametri

Teorema 6.5

In una circonferenza ogni corda non passante per i centro è minore del diametro (oppure ogni diametro è maggiore di una corda non passante per il centro).



Ip.
Corda Cd
Diametro AB

Ts
$CD < AB$

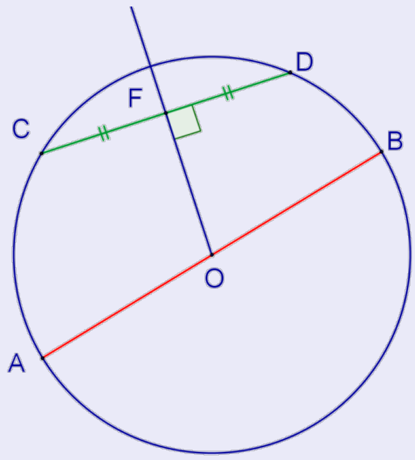
Dimostrazione
Congiungiamo il centro O della circonferenza con gli estremi C e D della corda. Consideriamo il triangolo COD, isoscele sulla base CD perché OC e OD raggi della circonferenza. Per le disuguaglianze triangolari sappiamo che un lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due, quindi $CD < CO + OD \wedge CO + OD = AB \Longrightarrow CD < AB$.

Mettiti alla prova

Dimostra i seguenti teoremi

Teorema 6.6
La perpendicolare ad una corda CD nel suo punto medio F passa per il centro della circonferenza.

Teorema 6.7
La perpendicolare condotta dal centro della circonferenza ad una corda CD, la incontra nel suo punto medio F.



Posizione di una retta rispetto ad una circonferenza

Nella definizione di cerchio abbiamo parlato di punti interni ad una circonferenza, enunciamo il seguente postulato

Postulato

Il segmento che congiunge un punto interno di una circonferenza con un punto esterno, la incontra in uno ed un solo punto.

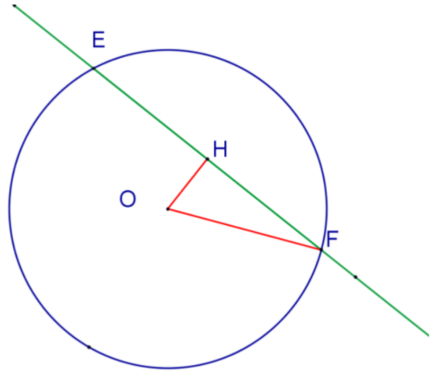
Da questo postulato possiamo dedurre che:
una retta avente un suo punto interno alla circonferenza, la incontra in due e solo due punti.

Una retta rispetto ad una circonferenza può assumere una delle seguenti posizioni: Secante, Tangente, Esterna.

Retta Secante la circonferenza

OH<OF, OF raggio della circonferenza e OH distanza del centro dalla retta

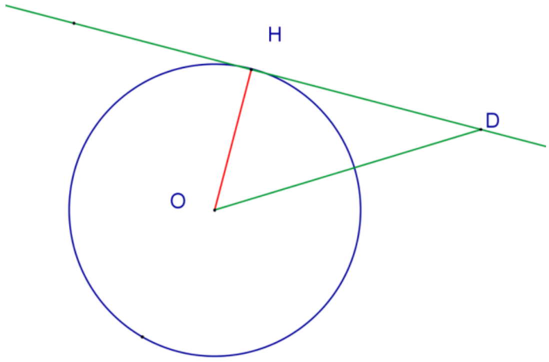
Il punto H è interno alla circonferenza ed appartiene alla retta, quindi la retta taglia la circonferenza in due soli punti.



Retta tangente la circonferenza

OH=OF, OF raggio della circonferenza e OH distanza del centro dalla retta

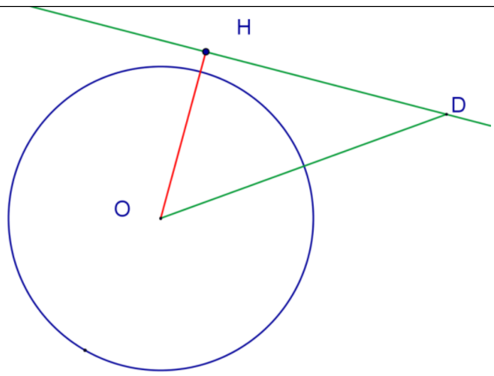
Il punto H appartiene alla circonferenza. Se prendiamo un punto generico D appartenente alla retta e congiungiamo il centro della circonferenza con D, otteniamo che OD>OH.
H è l' unico punto di intersezione tra la retta e la circonferenza, cioè la retta è tangente.



Retta esterna alla circonferenza

OH>OF, OF raggio della circonferenza e OH distanza del centro dalla retta

Consideriamo un punto D appartenente alla retta r e, congiungiamo il centro della circonferenza con D. Otteniamo il triangolo rettangolo HOD con OD>OH. Questo vale per qualsiasi punto della retta quindi, la retta è esterna alla circonferenza.



Possiamo concludere che:

Teorema 6.8

Data una circonferenza ed una retta:

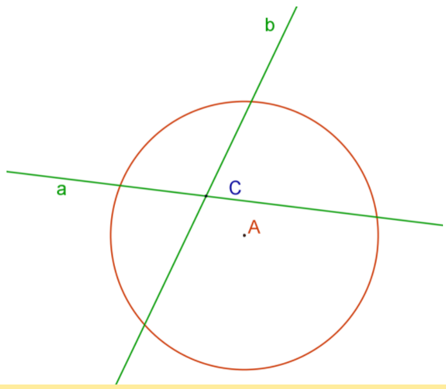
a. **Se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è minore del raggio la retta è secante**
b. **Se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è uguale al raggio la retta è tangente**
c. **Se la distanza della circonferenza dalla retta è maggiore del raggio la retta è esterna.**

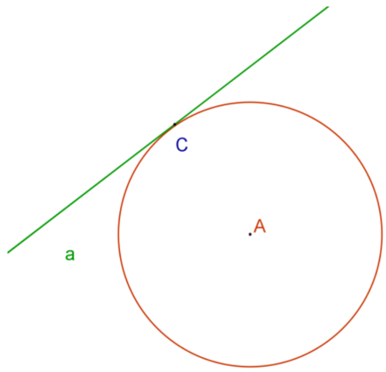
Come conseguenza del punto b possiamo enunciare il seguente teorema

Teorema 6.9
Una retta è tangente alla circonferenza in un punto H se e solo se è perpendicolare in H al raggio avente come estremo H.

Proviamo a rispondere alla seguente domanda:
Quante rette tangenti ad una circonferenza esistono, passanti per un punto?

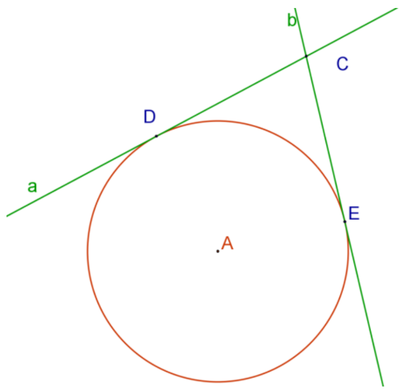
Dobbiamo distinguere i seguenti tre casi:





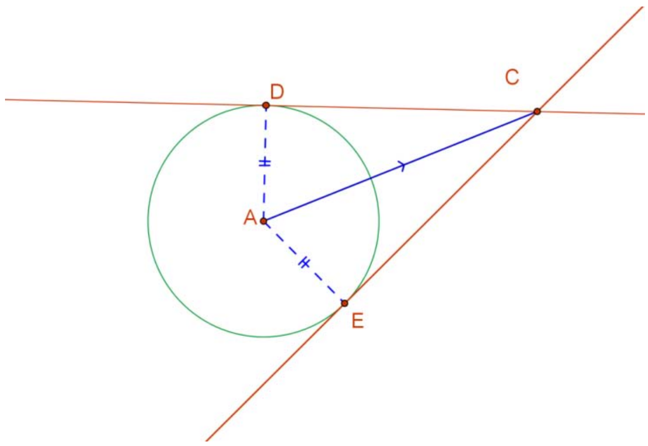
H è interno alla circonferenza
In questo caso non esiste nessuna retta tangente

H appartiene alla circonferenza
In questo caso, per il teorema precedente, la retta tangente è unica ed è perpendicolare al raggio avente come estremo il punto H



H è esterno alla circonferenza
In questo caso esistono due rette tangenti alla circonferenza uscenti da H e, i segmenti ottenuti congiungendo H con i punti di tangenza vengono detti **segmenti di tangenza**.

Teorema 7.0
Condotte da un punto esterno alla circonferenza le rette tangenti i segmenti di tangenza sono congruenti e la congiungente il punto esterno con il centro della circonferenza è la bisettrice dell' angolo formato dalle due tangenti.



Ip:

CD e CE segmenti di tangenza

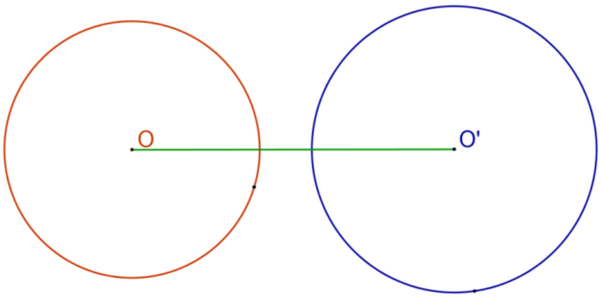
Ts.
$CD \cong CE$

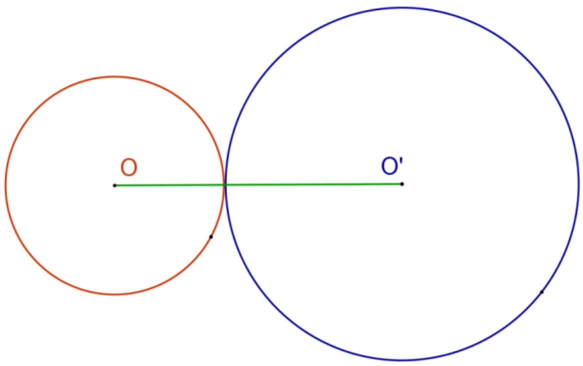
$\widehat{DCA} \cong \widehat{ACE}$

Dimostrazione
Congiungiamo il centro della circonferenza A con E ,D e C. Otteniamo due triangoli rettangoli CAD e AED, essi hanno:
$AD \cong AE$ perché raggi
AC in comune
I due triangoli sono quindi congruenti e conseguentemente hanno $CD \cong CE$ e $\widehat{DCA} \cong \widehat{ACE}$

Posizione reciproca di due circonferenze

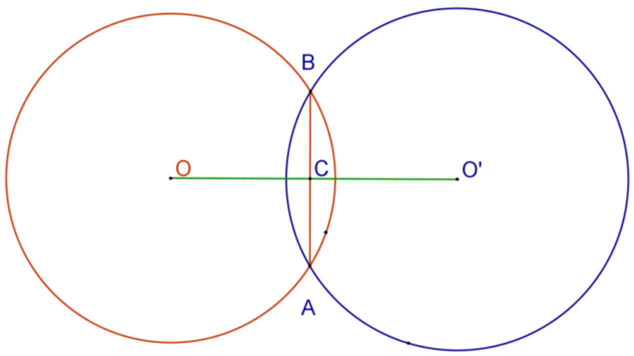
Le possibili posizioni tra due circonferenze possono essere sintetizzate nelle seguenti immagini.



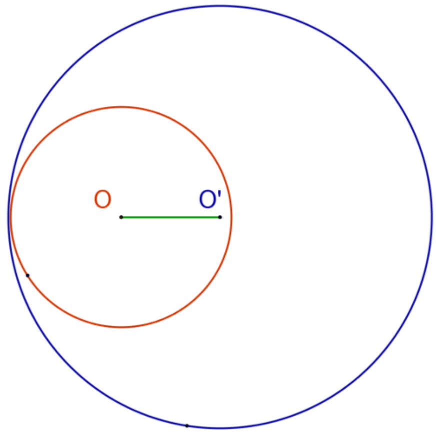


Circonferenze esterne
Le circonferenze sono prive di punti di intersezione e il centro dell'una è esterno all' altra
Le due circonferenze sono esterne se e soltanto se $OO' > r + r'$, cioè la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi

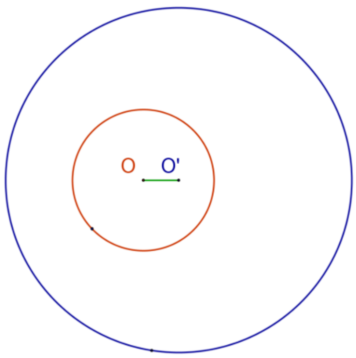
Circonferenze tangenti esternamente
Le circonferenze hanno un solo punto in comune e il centro dell' una è esterno all' altra.
Le due circonferenze sono tangenti esternamente se e soltanto se $OO' \cong r + r'$, cioè la distanza dei centri è congruente alla somma dei raggi



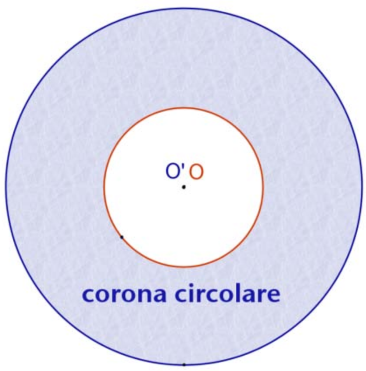
Circonferenze secanti
Le circonferenze hanno due punti di intersezione e il centro dell'una è esterno all' altra. La retta passante per i punti di intersezione è perpendicolare alla retta dei centri ed è detta Asse radicale.
La retta dei centri è asse dell' asse radicale
Le due circonferenze sono secanti se e soltanto se $r' - r < OO' < r + r'$, cioè la distanza dei centri è maggiore della differenza dei raggi e minore della loro somma.



Circonferenze tangenti internamente
Le circonferenze hanno un solo punto in comune e il centro dell' una è interno all' altra. Le due circonferenze sono tangenti internamente se e soltanto se $OO' \cong r' - r$, cioè la distanza dei centri è congruente alla differenza dei raggi



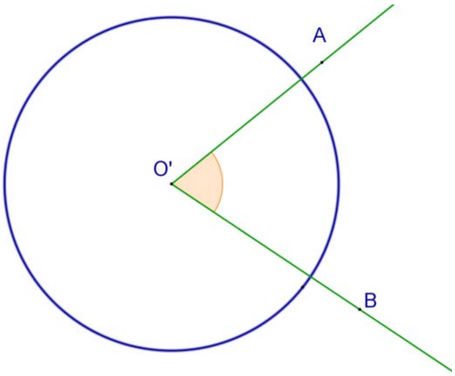
Circonferenze interne
Le circonferenze non hanno alcun punto in comune e il centro dell' una è interno all' altra.
Le due circonferenze sono interne se e soltanto se $OO' < r' - r$, cioè la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi



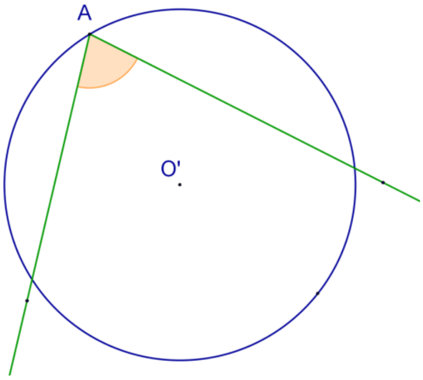
Circonferenze concentriche
Le circonferenze hanno lo stesso centro.
La parte di cerchio compresa tra le due circonferenze è detta **corona circolare**.

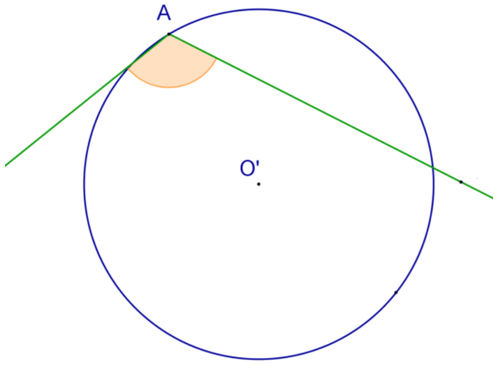
Angoli al centro e alla circonferenza

Si definisce **angolo al centro** di una circonferenza ogni angolo avente il vertice nel centro della circonferenza.

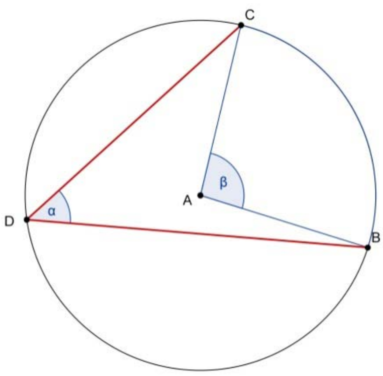


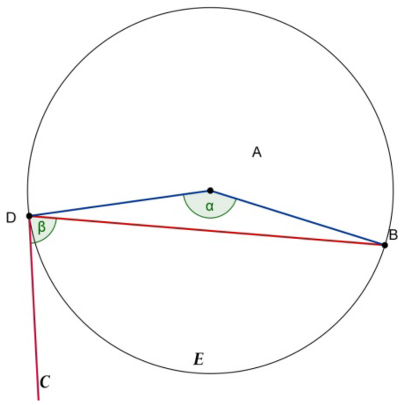
Si definisce **angolo alla circonferenza** un angolo convesso avente il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti la circonferenza o uno secante ed uno tangente.





Un angolo alla circonferenza **insiste su un arco** avente per estremi i punti in cui i lati incontrano la circonferenza. L' angolo al centro che insiste sullo stesso arco di un angolo alla circonferenza si dicono corrispondenti.



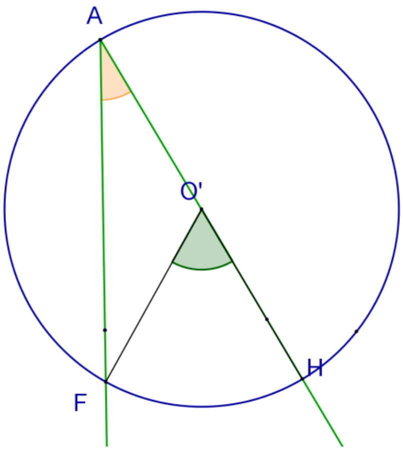


L' angolo BDC insiste sull' arco BC, e l' arco BDC è l' arco in cui è iscritto l' angolo.
L' angolo al centro BAC insiste sullo stesso arco.

Uno dei lati dell' angolo alla circonferenza BDC è tangente alla circonferenza.
L' arco BED è quello su cui insiste l' angolo BDC, l' BD è quello in cui è iscritto l' angolo.
L' angolo al centro DAB insiste sullo stesso arco

Teorema 7.1
Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.

Consideriamo il caso in cui un lato dell' angolo passa per il centro della circonferenza.

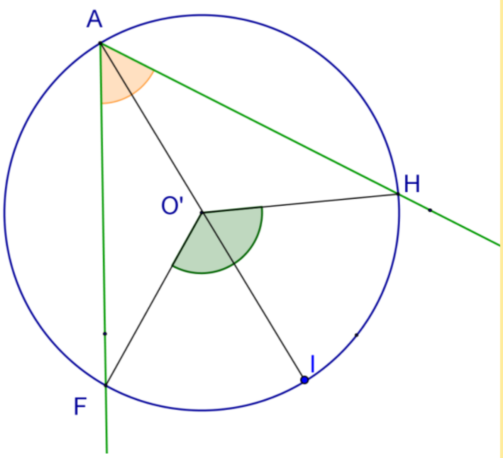


Ip.
$\widehat{HAF}$ angolo alla circonferenza
$\widehat{FO'H}$ angolo corrispondente al centro

Ts.
$\widehat{HAF} \cong \frac{1}{2}\widehat{FO'H}$

Dimostrazione
Consideriamo il triangolo FAO' isoscele sulla base AF. Gli angoli alla base sono congruenti, $\widehat{O'FA} \cong \widehat{FAO'}$. L' angolo $\widehat{HO'F}$ è esterno ed è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti quindi, $\widehat{FO'H} \cong 2\widehat{FAH} \Longrightarrow \widehat{HAF} \cong \frac{1}{2}\widehat{FO'H}$.

Consideriamo il caso in cui i due lati dell' angolo sono secanti.



Ip.
$\widehat{HAF}$ angolo alla circonferenza
$\widehat{FO'H}$ angolo corrispondente al centro

Ts.
$\widehat{HAF} \cong \frac{1}{2}\widehat{FO'H}$

Dimostrazione

Congiungiamo A con il centro O' e prolunghiamo fino ad incontrare la circonferenza in I.
Otteniamo due angoli $\widehat{FAI}$ e $\widehat{HAI}$ alla circonferenza aventi un lato passante per il centro della circonferenza. Per la dimostrazione precedente possiamo affermare che:

$\widehat{FAI} \cong \frac{1}{2}\widehat{FO'I}$ e
$\widehat{HAI} \cong \frac{1}{2}\widehat{IO'H}$
Ma $\widehat{HAF} \cong \widehat{FAI} + \widehat{HAI}$ e $\widehat{FO'H} \cong \widehat{FO'I} + \widehat{IO'H} \Longrightarrow \widehat{HAF} \cong \frac{1}{2}\widehat{FO'H}$

Corollari

Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti

Angoli che insistono su archi congruenti sono congruenti

Mettiti alla prova

Dimostra i seguenti teoremi

Teorema 7.2
Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

HAI IMPARATO……

1. cos’è un luogo geometrico
2. alcuni luoghi geometrici noti
3. a conoscere la circonferenza e le sue proprietà
4. la relazione tra retta e circonferenza
5. la relazione tra due circonferenze
6. la relazione tra angoli alla circonferenza e angoli corrispondenti al centro

POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

PREREQUISITI
La circonferenza
Angoli al centro e alla circonferenza
Luoghi geometrici

OBIETTIVI

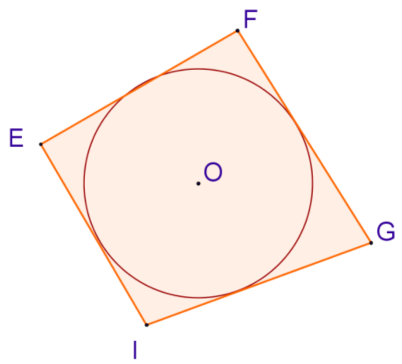
Sapere
Sapere definire quando un poligono è inscritto o circoscritto ad una circonferenza
Saper i teoremi relativi all' inscrivibilità e circoscrivibilità di un quadrilatero
Conoscere i punti notevoli di un triangolo
Conoscere i poligoni regolari

Saper fare
Saper costruire una circonferenza inscrivibile o circoscrivibile ad un triangolo
Saper stabilire se un poligono è inscrivibile o circoscrivibile ad una circonferenza

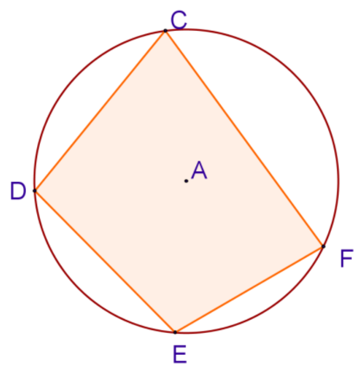
Introduzione

Definizione

Un poligono si dice **circoscritto** ad una circonferenza quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. In tal caso si dice che la circonferenza è inscritta nel poligono.



Un poligono si dice **inscritto** in una circonferenza quando i suoi vertici appartengono alla circonferenza. In tal caso si dice che la circonferenza è circoscritta al poligono.



Condizioni per inscrivere o circoscrivere un poligono

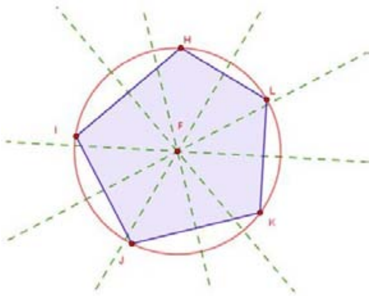
Per poter inscrivere un poligono in una circonferenza bisogna ricordare la definizione di due luoghi geometrici, oltre quella di poligono inscritto in una circonferenza:

- La circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto Centro.
- L' asse di un segmento è il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.
- Un poligono si dice inscritto in una circonferenza quando i suoi vertici appartengono alla circonferenza.

I vertici di ogni lato del poligono devono appartenere alla circonferenza e devono essere equidistanti dal centro, quindi il centro deve appartenere agli assi dei lati del poligono.

Definizione

In un poligono inscritto in una circonferenza, gli assi dei lati si incontrano in un punto coincidente con il centro della circonferenza.



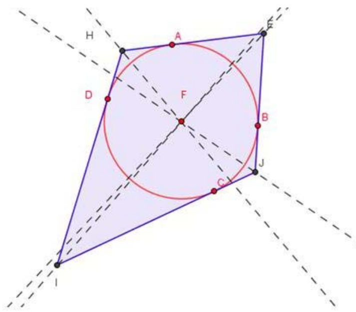
Per poter circoscrivere un poligono ad una circonferenza bisogna ricordare la definizione di due luoghi geometrici, oltre quella di poligono circoscritto:

- La circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto Centro.
- La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti del piano equidistanti dai lati dell' angolo.
- Un poligono si dice circoscritto in una circonferenza quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

Il punto di intersezione delle bisettrici è equidistante dai lati del poligono e conseguentemente tutti i lati risultano tangenti alla circonferenza avente come centro tale punto.

Definizione

In un poligono circoscritto ad una circonferenza, le bisettrici degli angoli si incontrano in un punto coincidente con il centro della circonferenza.



Conclusione

- Se gli assi dei lati di un poligono non si incontrano tutti in un medesimo punto, il poligono non è inscrivibile in una circonferenza

- Se le bisettrici degli angoli interni di un poligono non si incontrano in un medesimo punto, il poligono non è circoscrivibile ad una circonferenza

I punti notevoli di un triangolo

Si definiscono punti notevoli di un triangolo, i punti di incontro delle altezze, delle mediane, delle bisettrici e degli assi.

In un triangolo
Il punto di incontro delle mediane è detto **baricentro**
Il punto d' incontro degli assi è detto **circocentro**
Il punto d' incontro delle altezze è detto **ortocentro**
Il punto d' incontro delle bisettrici degli angoli interni è detto **incentro**
Il punto d' incontro delle bisettrici degli angoli esterni è detto **excentro**

Tutti i triangoli godono di queste proprietà quindi, sono sempre inscrivibili in una circonferenza o circoscrivibili ad una circonferenza.

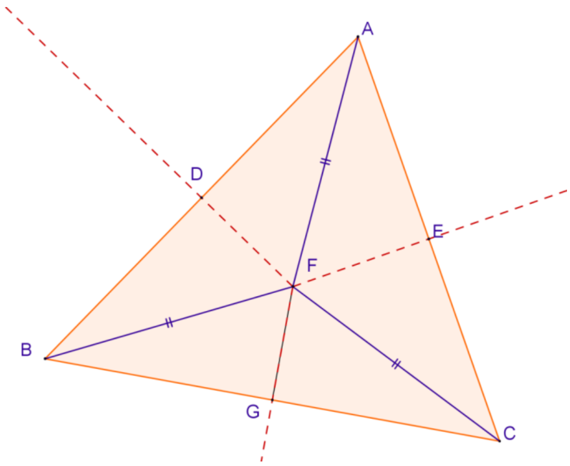
Teorema 7.2

Gli assi di un triangolo si incontrano tutti in un punto detto circocentro.

Ip.

Triangolo ABC
Assi dei lati

Ts.
$BF \cong FA \cong FC$



Dimostrazione

Sia F il punto d' incontro degli assi dei lati BC e AC.
Sappiamo che:
$BF \cong FC$ perché F appartiene all' asse di BC
$FC \cong FA$ perché F appartiene all' asse di AC

Per transitività $BF \cong FA$ quindi, gli assi si incontrano tutti in un punto.
I triangoli sono tutti inscrivibili in una circonferenza.

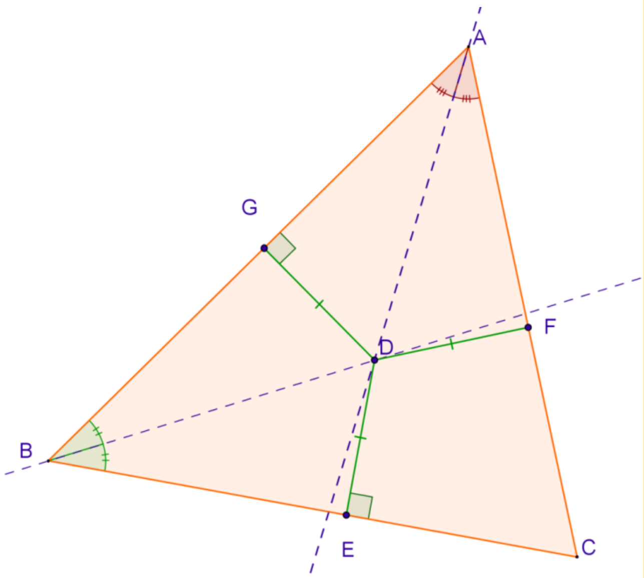
Teorema 7.3

Le bisettrici di un triangolo si incontrano tutti in un punto detto incentro.

Ip.

Triangolo ABC
Bisettrici degli angoli

Ts.
$DE \cong DG \cong DF$



Dimostrazione

Sia D il punto d' incontro delle bisettrici degli angoli $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$. Dal punto D costruiamo le distanza DE, DG e DF ai lati del triangolo.
Sappiamo che:
$DE \cong DG$ perché D appartiene alla bisettrice dell' angolo $\widehat{CBA}$
$DG \cong DF$ perché D appartiene alla bisettrice dell' angolo $\widehat{BAC}$.

Per transitività $DE \cong DF$ quindi, le bisettrici si incontrano tutte in un punto.
I triangoli sono tutti circoscrivibili ad una circonferenza.

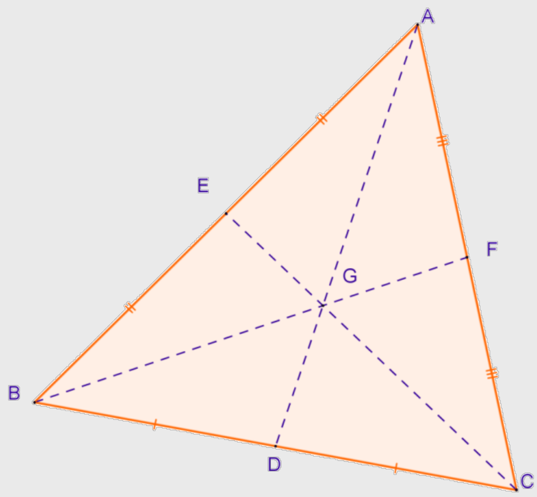
Mettiti alla prova

Dimostra il seguente teorema.

Teorema 7.4
Le mediane di un triangolo si incontrano in un punto. Il punto d' intersezione delle mediane le divide in due parti, tali che quella contenente il vertice è il doppio dell' altra.

Ip.
Triangolo ABC
$BD \cong DC$
$BE \cong EA$
$AF \cong FC$

Ts
$AD \cap CE \cap BF = G$
$AG \cong 2GD$
$CG \cong 2GE$
$BG \cong 2GF$



I quadrilateri inscritti e circoscritti

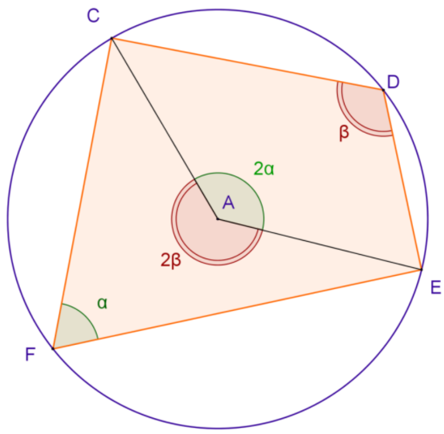
Per poter affermare che un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza o circoscrivibile ad una circonferenza devono essere verificate delle condizioni.

Quadrilateri inscritti

Teorema 7.5
Se un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza allora gli angoli opposti sono supplementari.

Ip:
CDEF è inscritto in una circonferenza

Ts.
$\widehat{EFC}+\widehat{CDE}=180°$ e $\widehat{FCD}+\widehat{DEF}=180°$



Dimostrazione

Congiungiamo A con C e con E. L' angolo $\widehat{CAE}$ è il corrispondente angolo al centro di $\widehat{EFC}$, quindi $\widehat{CAE}\cong 2\widehat{EFC}$.

L' angolo $\widehat{EAC}$ è il corrispondente angolo al centro di $\widehat{CDE}$, quindi $\widehat{EAC}\cong 2\widehat{CDE}$. Ma sappiamo che:
$\widehat{CAE}+\widehat{EAC}=360° \Longrightarrow 2\widehat{EFC}+2\widehat{CDE}=360° \Longrightarrow \widehat{EFC}+\widehat{CDE}=180°$

In un quadrilatero la somma degli angoli interni è 360°, conseguentemente anche gli angoli opposti $\widehat{FCD}$ e $\widehat{DEF}$ sono supplementari.

Mettiti alla prova

Dimostra il teorema inverso

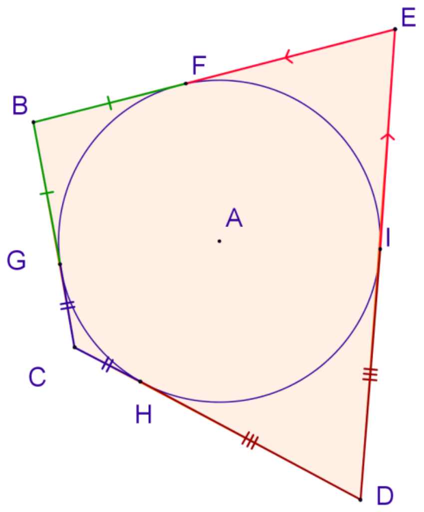
Teorema 7.6
Se gli angoli opposti di un quadrilatero sono supplementari, allora i quadrilatero è inscrivibile in una circonefrenza.

I due teoremi si possono fondere in uno solo.

Teorema 7.7
Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli angoli opposti sono supplementari

Quadrilateri circoscritti

Teorema 7.8
Se è un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza allora la somma dei lati opposti è congruente alla somma degli altri due lati.



Ip
BCDE è circoscritta alla circonferenza
Ts.
$BC + DE \cong BE + DC$

Dimostrazione
Consideriamo i segmenti di tangenza condotti da B,C,D,E, essi sono congruenti per un teorema precedentemente dimostrato.
$BG \cong BF$
$CG \cong CH$
$DI \cong DH$
$EI \cong EF$
Sommiamo a membro a membro
$BG + CG + DI + EI = \cong BF + CH + DH + EF$ sono segmenti congruenti perché somma di segmenti congruenti
Tale somma equivale a
$BC + DE \cong BE + DC$

Mettiti alla prova

Dimostra il teorema inverso

Teorema 7.9
Se in un quadrilatero la somma dei lati opposti è congruente allora il quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza

I due teoremi si possono fondere in uno solo.

Teorema 8.0
Un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se la somma dei lati opposti è congruente.

Mettiti alla prova

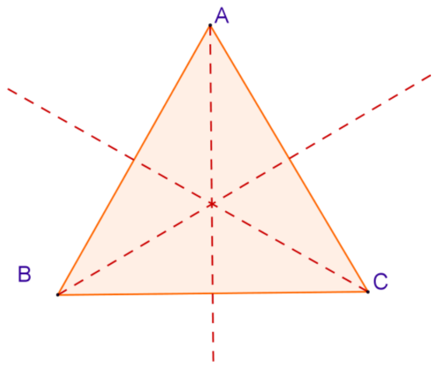
1. **Quali parallelogrammi conosci inscrivibili in una circonferenza?**
2. **Quali parallelogrammi conosci circoscrivibili ad una circonferenza?**

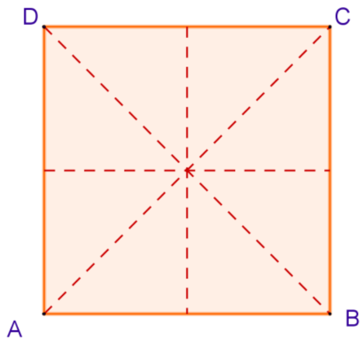
Poligoni regolari inscritti e circoscritti

Poligoni regolari

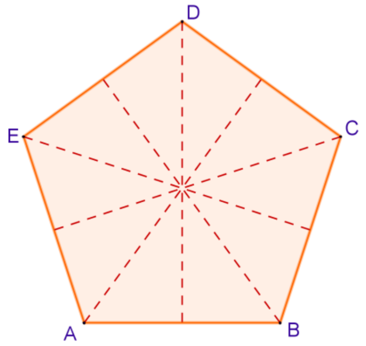
Definizione

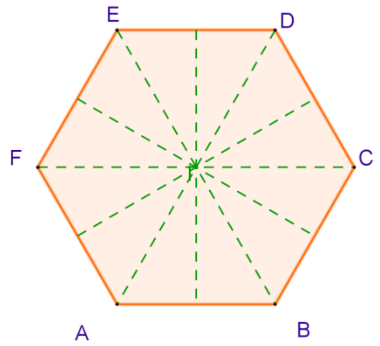
Un poligono si dice **regolare** quando è equilatero ed equiangolo





Triangolo equilatero Ha tre assi di simmetria	**Quadrato** Ha quattro assi di simmetria e un centro di simmetria





Pentagono Ha cinque assi di simmetria	**Esagono** Ha sei assi di simmetria e un centro di simmetria

Un poligono regolare di n lati ha n assi di simmetria.
Un poligono regolare avete il numero di lati pari ammette anche un centro di simmetria.

Poligoni inscrivibili e circoscrivibili

Teorema 8.1

Un poligono regolare è inscrivibile e circoscrivibile ad una circonferenza. Il centro della circonferenza inscritta e circoscritta coincidono.

Mettiti alla prova

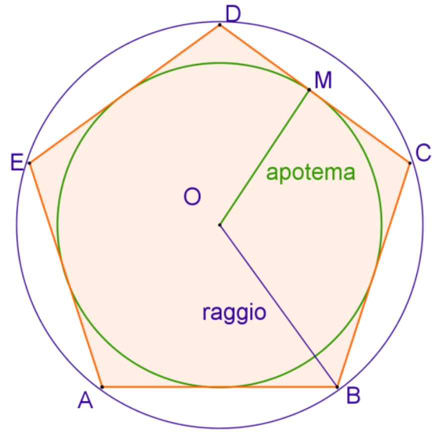
Dimostra il teorema enunciato nel caso in cui:

1. **il poligono regolare è un quadrato**
2. **il poligono regolare è un pentagono.**

Il centro della circonferenza circoscritta o inscritta è il centro del poligono, da non confondere con il centro di simmetria.

Il raggio della circonferenza circoscritta al poligono è detto **raggio del poligono regolare.**

Il raggio della circonferenza inscritta è detta **apotema del poligono regolare**.



GLOSSARIO

A

Angolo al centro

Si definisce angolo al centro di una circonferenza ogni angolo avente il vertice nel centro della circonferenza.

Angolo alla circonferenza

Si definisce angolo alla circonferenza un angolo convesso avente il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti la circonferenza o uno secante ed uno tangente.

Angoli complementari

Due angoli la cui somma da' un angolo retto sono detti complementari

Angolo concavo

Un angolo si dice concavo quando contiene il prolungamento dei suoi lati

Angolo convesso

Un angolo si dice convesso quando non contiene, al suo interno, il prolungamento dei suoi lati.

Angoli supplementari

Due angoli la cui somma è un angolo piatto sono detti supplementari.

Arco

Si definisce arco di una circonferenza la parte di circonferenza compresa tra due suoi punti, detti estremi dell' arco.

Asse di un segmento

Si dice **asse** di un segmento la perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio.

B

Baricentro

Il punto di incontro delle mediane di un triangolo è detto baricentro

Bisettrice

Si chiama Bisettrice di un angolo di vertice O la semiretta uscente da O, interno all' angolo, che lo divide in due angoli congruenti.

C

Centro di simmetria

Un punto P del piano si dice centro di simmetria se è definita nel piano una trasformazione che associa ad ogni punto A in un punto A', tale che la distanza tra A e P è uguale (uso la parola uguale riferendomi alla distanza come misure, e quindi come numero) alla distanza di A' da P

Cerchio

È la parte di piano compresa tra la circonferenza e i suoi punti interni

Circocentro

Il punto di incontro degli assi di un triangolo è detto circocentro

Circonferenza

È il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.

Congruenza

Due figure si dicono congruenti quando tramite un movimento rigido sono sovrapponibili.

Corda

Si definisce corda di una circonferenza il segmento che unisce due punti qualsiasi della circonferenza

D

Diagonale

Si definisce diagonale di un poligono il segmento che congiunge due vertici non consecutivi.

Distanza di un punto da una retta

Si definisce distanza di un punto da una retta il segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta data.

E

Elementi uniti

Si definiscono elementi uniti i punti e le figure che trasformate coincidono con sé stesse.

Excentro

Il punto di incontro delle bisettrici degli angoli esterni di un triangolo è detto excentro.

F

Funzione

Dati due insiemi A e B si dice funzione da A su B, f:A→ B. la relazione che fa corrispondere ad ogni elemento di A un solo elemento di B

Funzione Biunivoca

Una funzione f:A→ B si dice biunivoca se ad ogni elemento di A corrisponde uno ed uno solo elemento di B

I

Incentro

Il punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni di un triangolo è detto incentro.

Isometria

È una trasformazione del piano avente come proprietà invarianti la distanza tra due punti, gli angoli e il parallelismo

O

Omotetia

È una trasformazione del piano avente un centro O di omotetia e che associa

ad un segmento AB un segmento A'B' che stanno tra loro in un rapporto $\frac{AB}{A'B'} = k$, k costante

Ortocentro

Il punto di incontro delle altezze di un triangolo è detto ortocentro.

P

Parallelogrammo

Un quadrilatero avente i lati opposti a due a due paralleli è un parallelogramma

Poligono regolare

Un poligono si dice regolare quando è equilatero ed equiangolo

Q

Quadrilatero

Un poligono convesso (tale cioè che la retta sostegno di un suo qualunque lato lascia la figura tutta da una parte) composto da quattro lati è detto quadrilatero. La somma degli angoli interni di un quadrilatero è 180°

R

Raggio

Si definisce raggio di una circonferenza la distanza del centro da uno dei sui punti

Rotazione

Si definisce Rotazione una trasformazione individuata da un centro di rotazione e da un angolo di rotazione che associa ad un punto A il punto A' che soddisfa le seguenti condizioni:

- $\widehat{AOA'}$ è orientato in modo che abbia la stessa ampiezza dell' angolo di rotazione, lo stesso orientamento e OA come primo lato
- $AO \cong OA'$

S

Segmento circolare

La parte di cerchio delimitata dall' arco e dalla corda sottesa

Semicirconferenza

L' arco avente come estremi quelli di un diametro.

Simmetria assiale

Si definisce Simmetria Assiale una trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto A del piano il suo simmetrico A' rispetto ad una retta fissa r detta Asse di Simmetria.

Simmetria Centrale

Si definisce Simmetria Centrale una trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto A del piano il suo simmetrico A' rispetto ad un punto fisso O detto Centro di Simmetria, dove O è il punto medio del segmento AA'.

T

Trapezio

Un quadrilatero avente due lati opposti paralleli si dice trapezio

Trapezio Isoscele

Un trapezio è isoscele quando ha i lati obliqui congruenti oppure gli angoli adiacenti ad una delle due basi sono congruenti

Trapezio Rettangolo

Un trapezio è rettangolo quando uno dei due lati obliqui è perpendicolare alle basi. L' altezza del trapezio è congruente al lato perpendicolare.

Trasformazione

Si chiama trasformazione una funzione biunivoca del piano che fa corrispondere ad un punto P la sua immagine P'.

Le trasformazioni si distinguono in base alle proprietà invarianti delle figure trasformate.

Traslazione

Si definisce Traslazione di vettore $\vec{v}$ una trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto A del piano il suo traslato A', tale che $\overrightarrow{AA'}$ ha la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo di $\vec{v}$.