

# Capítulo 5

## El caso de tres zonas

En el capítulo que nos ocupa extendemos el análisis del sistema del caso de dos zonas, que fue analizado en el anterior, al de tres zonas. Haremos aquí el mismo tipo de estudio que en el capítulo anterior, si bien ahora pasaremos directamente a analizar el sistema en el caso de que la relación de frecuencias sea un número irracional.

Hasta ahora, en el caso bizonal, habíamos analizado qué sucedía cuando ambas pendientes eran iguales. Generalizaremos la ecuación definida por  $f(x)$  para el caso trizonal pudiendo tener dos pendientes distintas para las zonas exteriores y central, así como añadiendo una constante  $c$  que se sumará a la anterior  $f(x)$  en las tres zonas.

### 5.1. Caso simétrico

Las ecuaciones que definen el caso trizonal son las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

$$f(x) = \begin{cases} bx + (a - b)x_0, & \text{si } x > x_0, \\ ax, & \text{si } |x| \leq x_0 \\ bx - (a - b)x_0, & \text{si } x < -x_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Para que la característica  $f(x)$  sea simétrica con respecto al origen es necesario que se cumpla que  $a = -b$ . Esto hace que las pendientes sean iguales pero de signo contrario, con lo que se puede reescribir (5.2) como:

$$f(x) = \begin{cases} -ax + 2ax_0, & \text{si } x > x_0, \\ ax, & \text{si } |x| \leq x_0 \\ -ax - 2ax_0, & \text{si } x < -x_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Para el estudio realizado en el presente punto se ha tomado  $a = 1$ .

Una vez hemos fijado la relación de frecuencia  $\Omega$  pasamos a ver el comportamiento de la solución para distintos valores de los parámetros. En primer lugar fijamos  $R = 1$  y vamos variando  $r$ , tal y como se ha venido haciendo hasta ahora. Comenzamos eligiendo un valor pequeño de  $r = 0,1$  para ir viendo gradualmente el efecto de ir aumentándolo. Al obtener la solución en el tiempo, integrando hacia delante como hacia atrás, obtenemos la gráfica 5.1, en la que se han tomado como condiciones iniciales  $x = -1$  y  $x = 1$ , para poner de manifiesto un hecho peculiar del caso de tres zonas, que es la existencia de dos atractores para el tiempo hacia delante. En efecto, si observamos la gráfica 5.1 se puede comprobar como para  $x(t = 0) = 1$  corresponde a una senoide que toma valores de  $x$  mayores que cero. Sin embargo, para  $x(t = 0) = -1$  se tiene que la órbita toma sólo valores negativos de  $x$ . Examinando más detenidamente la gráfica es fácil ver que ambas órbitas corresponden a trayectorias de la solución que han quedado en una sola zona de la función  $f(x)$ : la zona exterior derecha, en la que  $x > x_0$  y exterior izquierda, con  $x < -x_0$ . Corresponden por lo tanto a órbitas unizonales. En rojo, está la solución correspondiente a integrar con el tiempo hacia atrás. Como dato interesante se ve que a pesar de haber elegido condiciones iniciales distintas, ambas soluciones confluyen en una única órbita, además unizional, encerrada en la zona central de  $f(x)$ , esta es aquella en la que se cumple que  $|x| < x_0$ . Recordamos que la pendiente central usada aquí es positiva, pero al estar usando el tiempo negativo la exponencial resultante del transitorio tiende a extinguirse.

### 5.1.1. Análisis de la solución temporal

En la figura 5.2 se ha aumentado la amplitud del segundo forzamiento  $r$  hasta conseguir que exista una órbita que está en ambas zonas. Se puede ver como existen instantes de tiempo en los que la solución toma valores en torno a un valor medio positivo y posteriormente y de forma súbita pasa a tomar valores en torno a un valor negativo. Podemos decir que la solución está pasando de una zona de atracción a otra. No obstante, para valores de tiempo negativo la solución abarca las tres zonas de  $f(x)$ , estando confinada bajo la influencia de un solo atractor. Así pues, se puede concluir que es posible encontrar dos atractores con forma de toro con el tiempo hacia delante y sólo uno con el tiempo hacia detrás.

Las soluciones correspondientes a tiempos positivos serán siempre estables debido a que las zonas laterales de  $f(x)$  son contractivas y la única

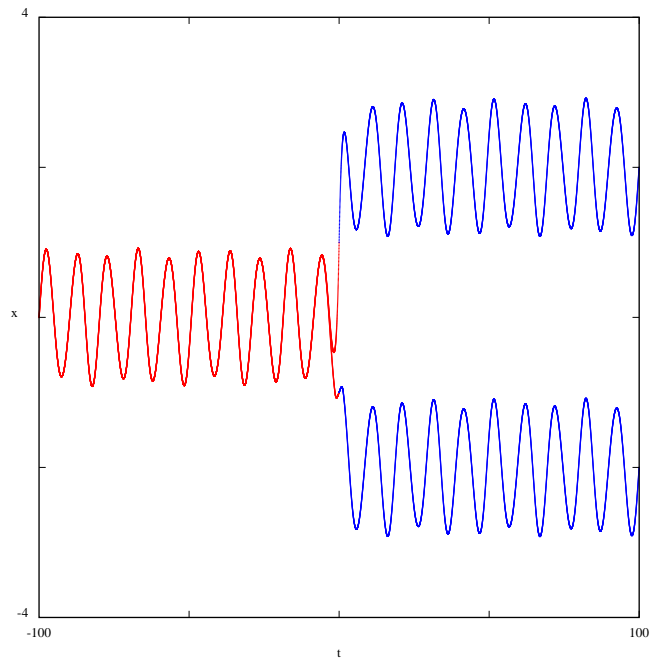


Figura 5.1: Soluciones temporal para  $R = 1$  y  $r = 0,1$  con  $x_0 = -1$  y  $x_0 = 1$

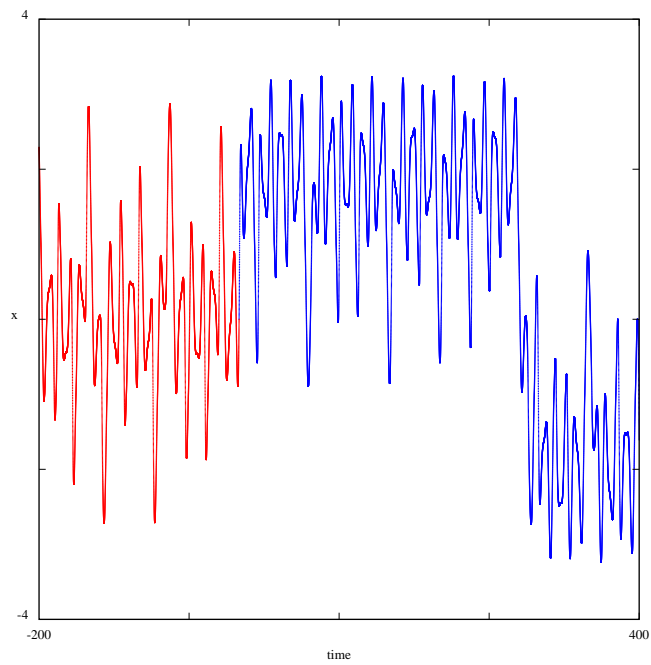


Figura 5.2: Solución temporal para  $R = 1$  y  $r = 0,553$

región expansiva es la central. Podemos ver esto como que cada vez que la solución alcanza una de las regiones exteriores, esta tiende a disminuir su amplitud, para volver a caer en la región central, donde tomará valores mayores de amplitud y volver a una de las regiones exteriores, y así repetir el ciclo. Ocurre lo contrario con el tiempo hacia atrás, donde no es posible aumentar el parámetro  $r$  todo lo que se quiera, ya que esto haría que la solución fuese inestable. En la gráfica 5.3 tenemos un ejemplo en el que  $r = 1$  y existe solución para  $t > 0$ , lo que no sucede para  $t < 0$ .

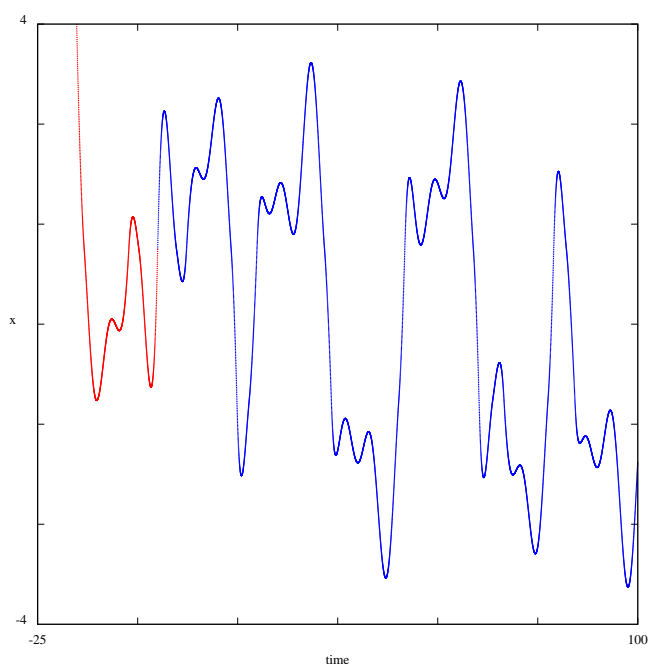
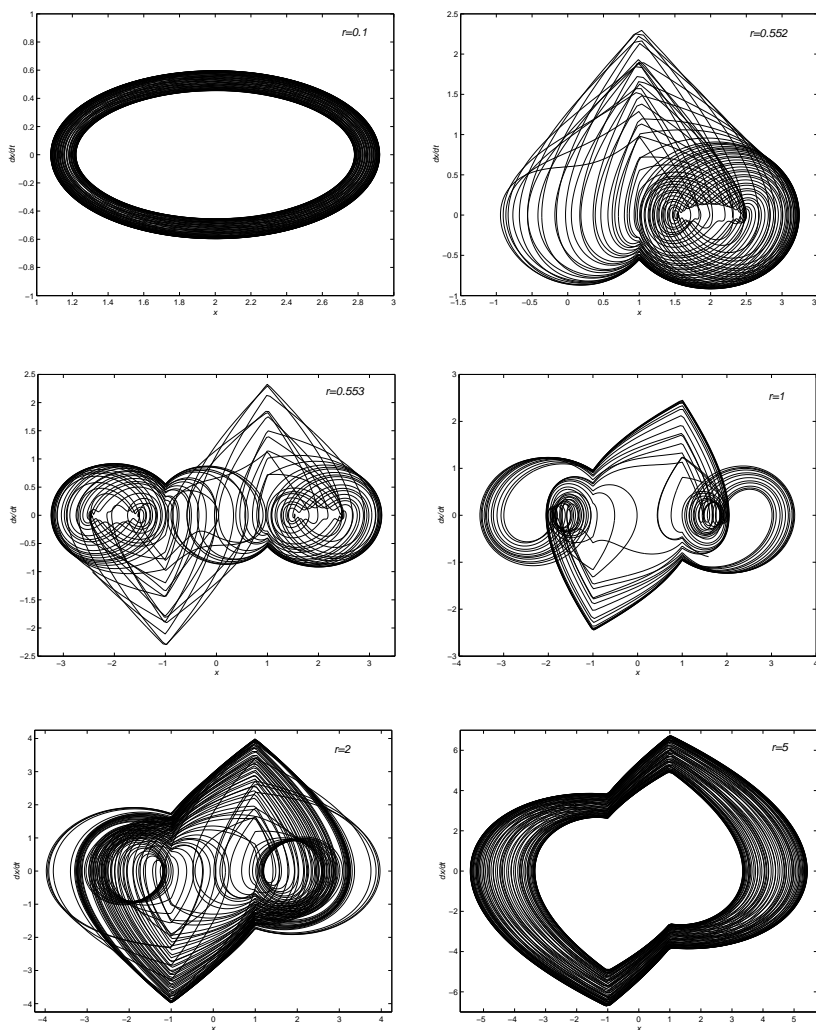


Figura 5.3: Soluciones temporal para  $R = 1$  y  $r = 1$

Es posible comprobar la influencia del parámetro  $r$  en el tipo de la solución si representamos  $\dot{x}(t)$  frente a  $x(t)$ . Aunque perdemos la información temporal, se presentan otros datos de forma más clara. En las gráficas de la tabla 5.1 es posible ver la evolución de la solución para distintos valores de  $r$ . En concreto se tiene aquí, como para un valor de  $r = 0,1$  la solución está “atrapada” en torno a un atractor claramente definido. Para  $r = 0,552$  se aprecia como existen partes de la trayectoria que comienzan a escapar a la influencia del atractor original que estaba en la figura anterior. En este momento y con tan sólo aumentar ligeramente  $r$  en una milésima se produce el salto de la trayectoria a otro atractor que se ha formado, saltando esta continuamente de uno a otro (esto es lo que se veía en la figura 5.2). Si



continuamos aumentando la amplitud de la segunda excitación los atractores se irán deformando hasta perderse por completo transformándose en uno nuevo, tal y como se puede extraer de la observación de la última figura. Las últimas figuras corresponden a casos en los que  $r$  es tan grande que la órbita abarca las tres zonas de la función  $f(x)$  y en los que ya no existen dos atractores.



Cuadro 5.1:  $\dot{x}(t)$  frente a  $x(t)$  para distintos valores de  $r$

Una forma más gráfica de ver la naturaleza del atractor es representándolo en el espacio de estados. En la figura 5.4, correspondiente al caso en el que existen dos atractores, se ve con claridad como se forman dos zonas de atracción correspondientes a dos toros, uno encerrado dentro del otro.

Ésta es otra forma de ver lo que sucedía en las gráficas 5.2 y en la tercera figura de la tabla 5.1.

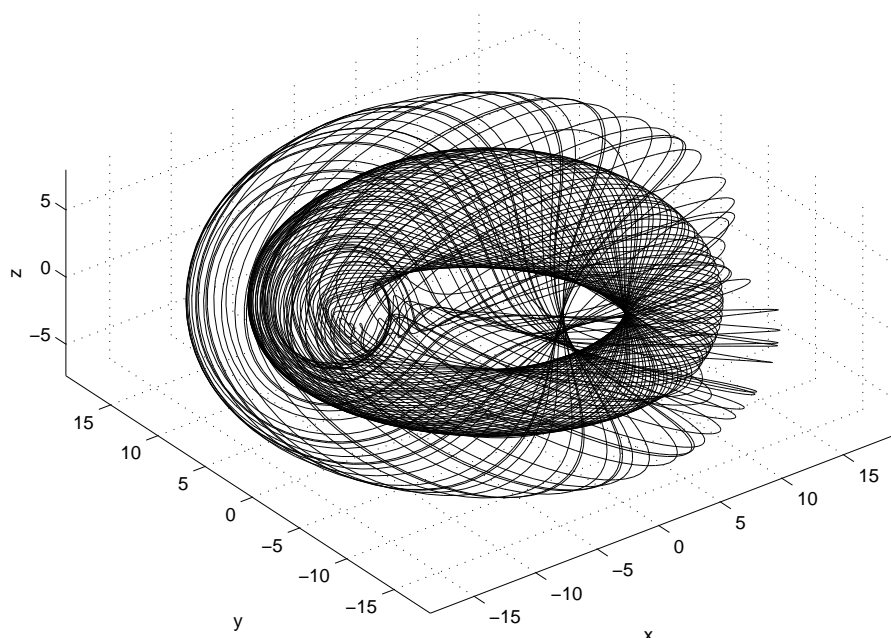


Figura 5.4: Atractor con el tiempo hacia delante para  $R = 1$  y  $r = 0,553$

### 5.1.2. Análisis de la sección de Poincaré

En las figuras 5.5 y 5.6, que representan las secciones de Poincaré para distintos valores de  $r$ , se puede observar cuál es el efecto de aumentar la amplitud de la segunda excitación. En 5.5 están dibujadas las tres secciones de Poincaré distintas, a saber: en violeta, para la condición inicial  $x_0 = 1$  y en azul, para  $x_0 = -1$ , si bien son ambas integrando con el tiempo hacia delante; en rojo, para  $x_0 = 0$  y con el tiempo hacia atrás. Podemos comparar esta gráfica con la figura 5.1, en la que se puede apreciar como las soluciones con el tiempo hacia delante se encuentran en una zona correspondiente a  $x > 1$  ó  $x < -1$  según la elección de la condición inicial,  $x_0 = 1$  y  $x_0 = -1$  respectivamente. Observando la figura 5.6 se comprueba como la curva se ha ido deformando.

En la tabla 5.2 se puede ver como va cambiando la sección de Poincaré a medida que aumenta el parámetro  $r$ . Podemos ver que inicialmente existe una sola curva, tanto para el tiempo hacia delante como hacia atrás. Las

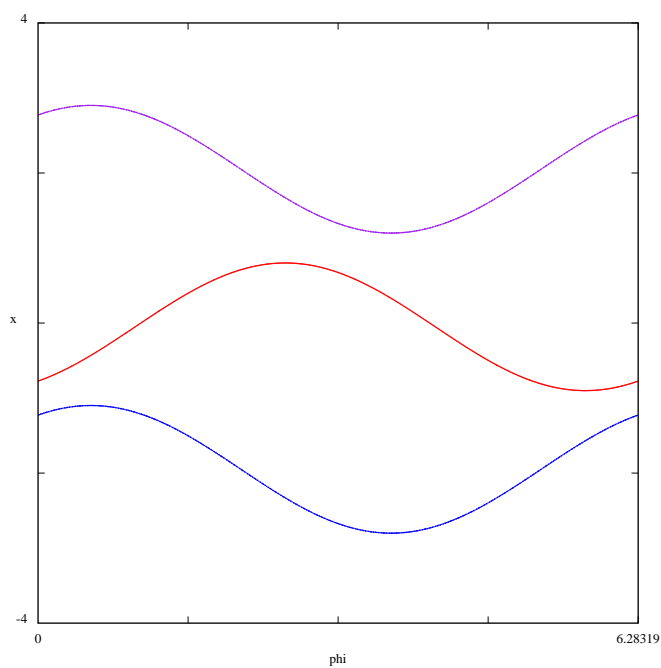


Figura 5.5: Sección de Poincaré para  $R = 1$  y  $r = 0, 1$

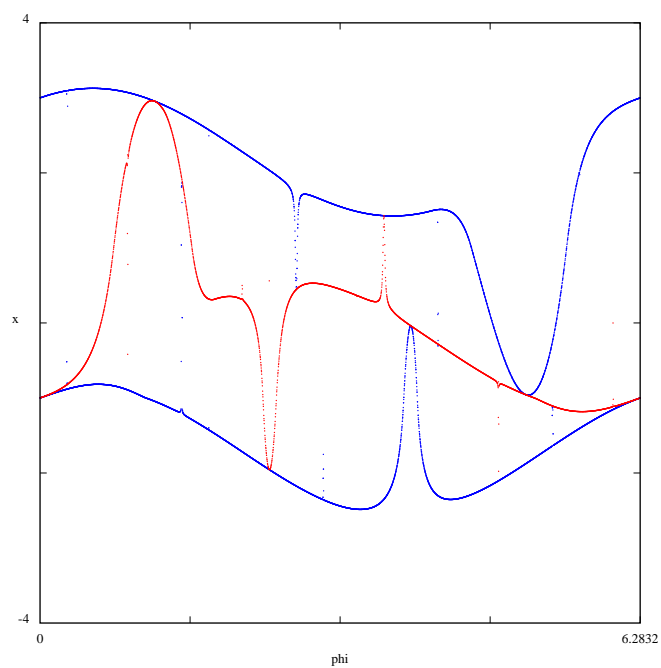
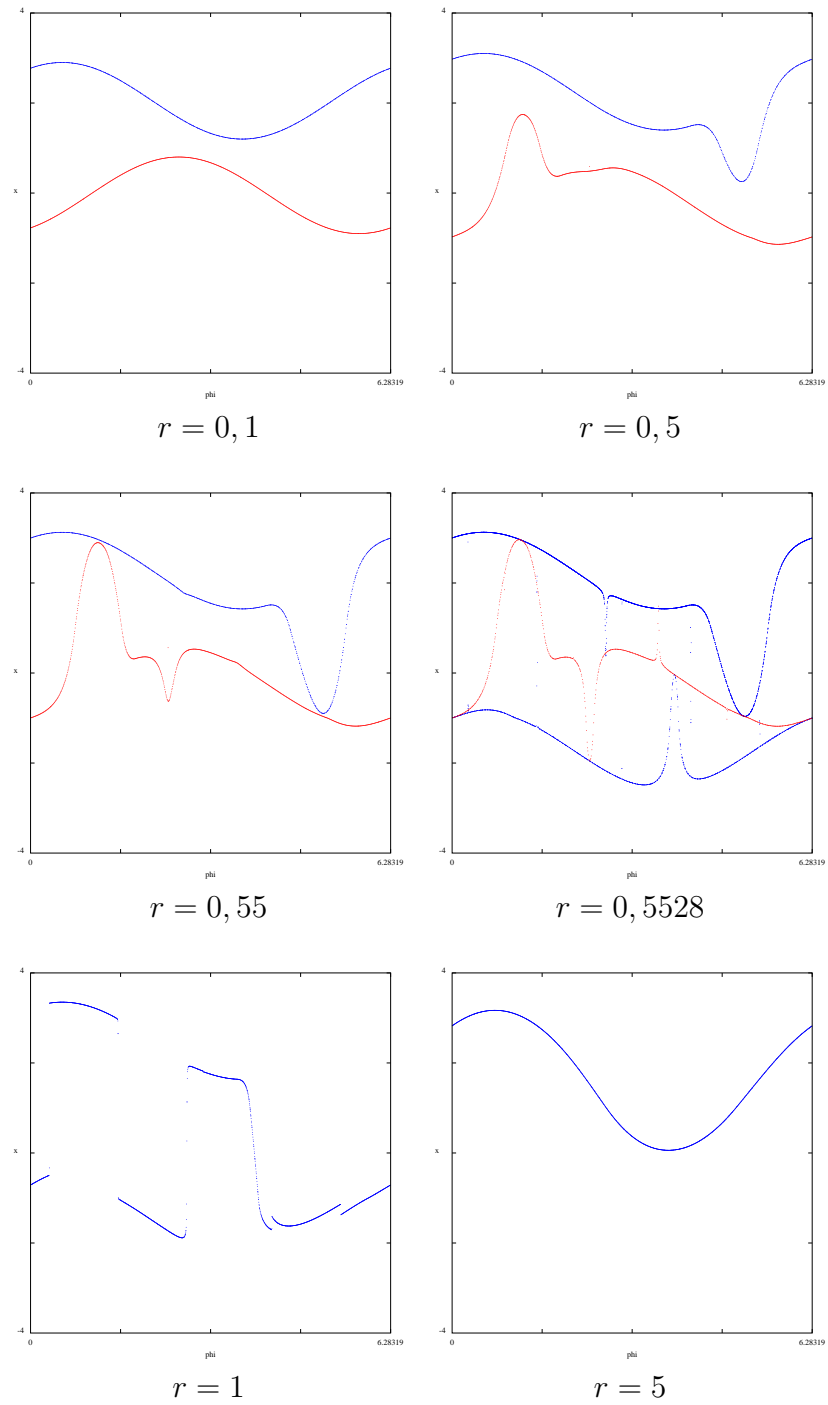


Figura 5.6: Sección de Poincaré para  $R = 1$  y  $r = 0, 552795$

Cuadro 5.2: Sección de Poincaré para distintos valores de  $r$

curvas cambian notablemente en la segunda y tercera gráfica, correspondientes a  $r = 0,5$  y  $r = 0,55$  respectivamente. Incrementando ligeramente el valor de  $r$  hasta  $0,5528$ , se consigue que aparezca una segunda curva en la zona de  $x < 0$ . Si volvemos a la figura 5.5 se puede comprobar como algunos puntos se asemejan a los correspondientes a la parte de  $x$  negativa en la tercera gráfica de la tabla 5.2. Si  $r$  sigue creciendo el primer efecto que tenemos es que la curva en color rojo, que corresponde a la solución en el tiempo hacia atrás, desaparece; lo que simplemente quiere decir que para estos valores de  $r$  la solución es inestable. En cuanto a la curva para el tiempo hacia delante se aprecia que esta se deforma de manera tal que ya no se distinguen dos curvas diferenciadas, como ocurría en el caso de  $r = 0,5528$ .

En la tabla 5.3 se ve lo que sucede con la solución en el tiempo. En la primera figura la solución está confinada en una sola zona, en la que  $x > 1$ . La segunda gráfica corresponde a una órbita bizonal; aquí la trayectoria de la solución está confinada entre las zonas central y exterior positiva, en este caso  $x > 0$ . En la siguiente la solución va cambiando entre zonas en las que toma valores positivos y negativos alternadamente. Conforme  $r$  sigue aumentando la frecuencia de paso de una zona a otra va aumentando, hasta que finalmente no se puede decir que la solución vaya de una zona a otra, sino que la solución se convierte en una única senoide que toma tanto valores positivos como negativos.

### 5.1.3. Análisis de la autocorrelación y del espectro de densidad de potencia

En cuanto a las gráficas resultado de haber realizado la autocorrelación de la solución podemos ver como las dos primeras gráficas corresponden claramente a la autocorrelación de una señal periódica (una propiedad de las señales periódicas es que su autocorrelación también es periódica). Hay que decir que en las gráficas (sobre todo en la primera) se observa una atenuación en los valores de la autocorrelación; esto es debido a que estamos trabajando con métodos numéricos y que la secuencia de puntos de la solución que estamos usando es finita. Viendo la tercera gráfica también se comprueba que existe cierta periodicidad en el parecido de la señal consigo misma. De igual forma sucede en los casos en que  $r = 0,75$  y  $r = 1$ , si bien ahora el parecido es más claro. Cuando  $r = 5$  se ve más claramente que la solución es periódica, al serlo su autocorrelación.

La información que se muestra en la tabla 5.5 es el módulo de la transformada de Fourier de la solución. En estas gráficas podemos ver, com-