

Capítulo 4

El caso de dos zonas

A la hora de abordar el problema elegimos en primer lugar el estudio del caso en que f tiene dos zonas lineales diferenciadas, cada una de ellas con su pendiente. De esta forma podemos estudiar un sistema que es más sencillo y posteriormente comparar con los resultados que se obtendrán en el estudio del caso de tres zonas.

En primer lugar explicamos cual será la metodología que vamos a seguir. En el capítulo anterior se han presentado distintas formas de obtener información del sistema, si bien estas fueron hechas suponiendo que una de las excitaciones era nula. El objetivo del estudio que nos ocupa ahora es medir la influencia de la introducción del segundo forzamiento para distintos valores de la relación de frecuencia Ω . Comenzaremos fijando el valor de R y a partir de ahí se irá modificando el valor de r para medir cómo afecta al comportamiento del sistema. Estos resultados serán apoyados mediante las gráficas obtenidas por los procedimientos que fueron explicados en el capítulo anterior.

4.1. Aproximación de la relación de frecuencias mediante números racionales

El procedimiento que seguiremos consistirá en ir aumentando r de forma heurística con cuidado de no obtener una solución inestable. Se irán fijando los decimales de r hasta conseguir una situación lo más cercana a la inestabilidad posible, pues como comprobaremos posteriormente, es ahí donde surge el comportamiento más rico de este sistema. Para ello contamos con la ayuda del software de cálculo numérico *DSTool*.

4.1.1. Número de rotación $\Omega = \frac{1}{2}$

La primera fracción que aproxima a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es $\frac{1}{2}$. Comenzamos estudiando cuál es la solución del sistema en caso de que no exista excitación externa. Utilizando los resultados obtenidos en la resolución de la ecuación diferencial podemos concluir que la solución será una exponencial más una constante, como se puede observar en la ecuación (2.21) haciendo $R = 0$ y $r = 0$. Si aumentamos una de las amplitudes, por ejemplo $R = 1$, se consigue que la solución de la ecuación sea una senoide más una constante con un pequeño transitorio correspondiente a la exponencial que se extingue con el tiempo. En el caso de ausencia de excitación, como mencionábamos en el capítulo anterior, la trayectoria de la solución está apoyada sobre un atractor con forma de toro. Al añadir la excitación, lo que se consigue es deformar el atractor.

Si aumentamos demasiado la amplitud de las excitaciones el sistema se transforma en inestable. Esto es debido a que en la zona donde existe pendiente positiva, i.e. donde $x > 0$ la solución presenta una exponencial con exponente positivo, lo que hace que la solución crezca cuando se encuentra en esta zona. Si la solución no vuelve a pasar por la zona donde la pendiente es negativa deja de estar acotada. Este es el caso que observamos en la figura 4.4. El procedimiento que seguiremos consistirá en ir aumentando r de forma heurística con cuidado de no obtener una solución inestable.

Si representamos ahora la solución usando el mapa de Poincaré, podemos ver que en el caso correspondiente a la figura 4.5 se trata de una solución estable, pues lo que aparece en el mapa es un punto fijo. Para el caso de la solución inestable, sin embargo, no ocurre esto, como podemos observar en la figura 4.6.

Para medir la atractividad del toro podemos lanzar una serie de condiciones iniciales. Para conseguir esto lo que hacemos es representar para un periodo de la solución, en el caso de $\Omega = \frac{1}{2}$, todos los valores correspondientes a resolver la ecuación diferencial con estas condiciones iniciales en el instante en que $\theta = 2k\pi = 4\pi$. Dicho de otra forma, dibujamos el valor de la solución después de haber pasado un tiempo $t = 2k\pi = 4\pi$. Para este ejemplo lanzaremos unas condiciones iniciales correspondientes a los puntos del contorno de un rectángulo definido por $x = [0, -1]$ y $\varphi[0, 2\pi]$. El conjunto de los puntos imagen representados corresponde, usando la definición de la aplicación de Poincaré de la ecuación (4.1), a:

$$\Pi(x_0, \varphi_0) = (x_1, \varphi_1) \quad (4.1)$$

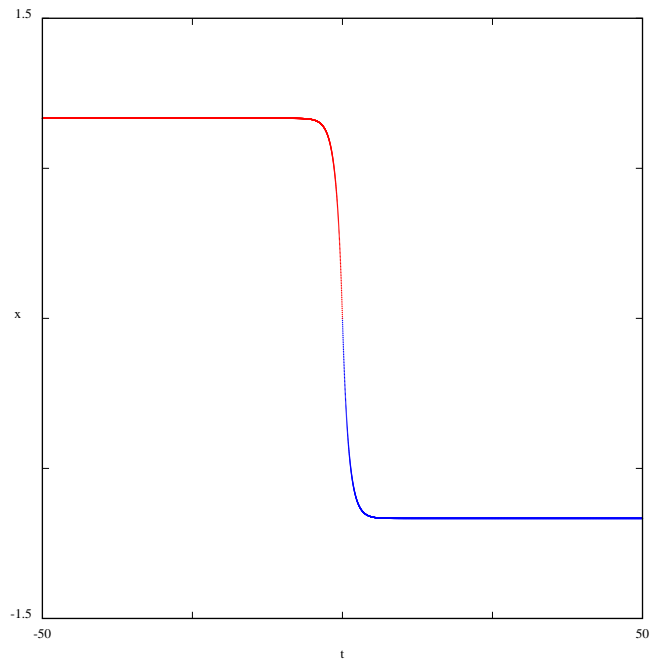


Figura 4.1: Solución temporal con $R = 0$ y $r = 0$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

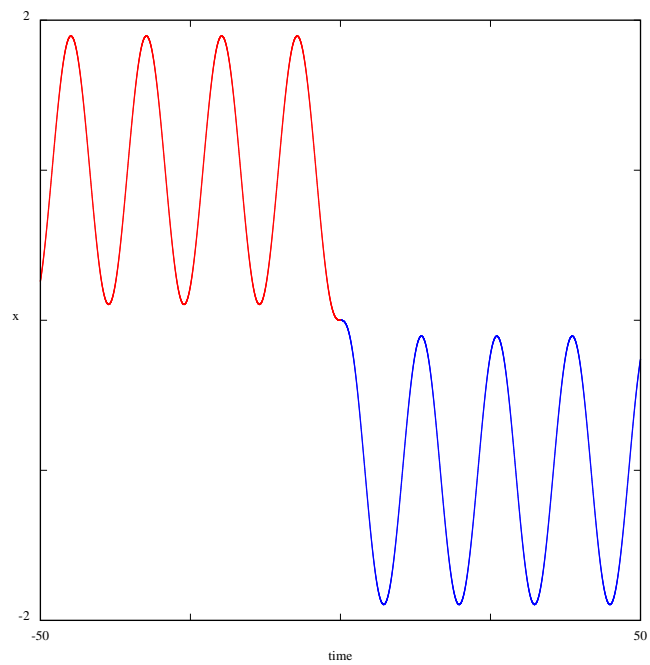


Figura 4.2: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

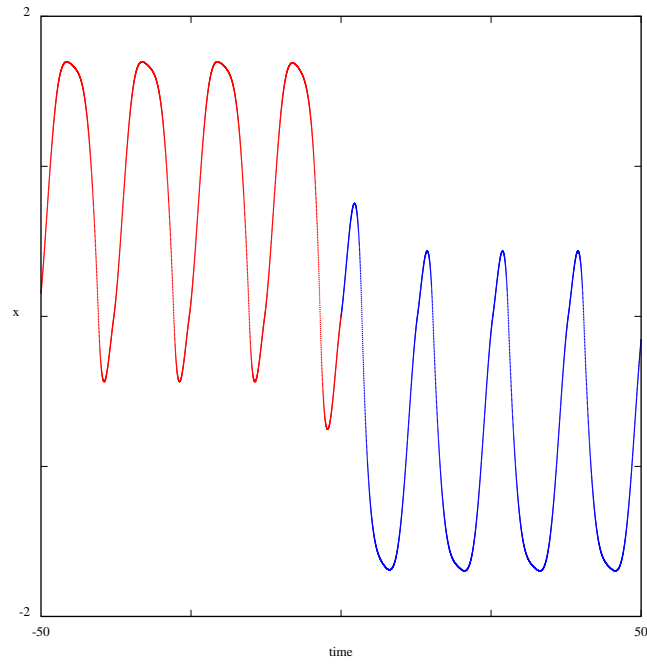


Figura 4.3: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0,3$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

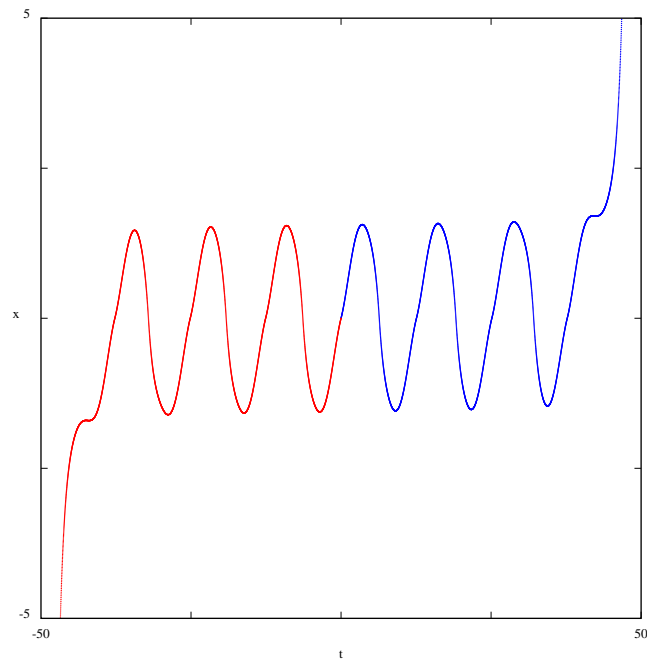


Figura 4.4: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0,3945$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

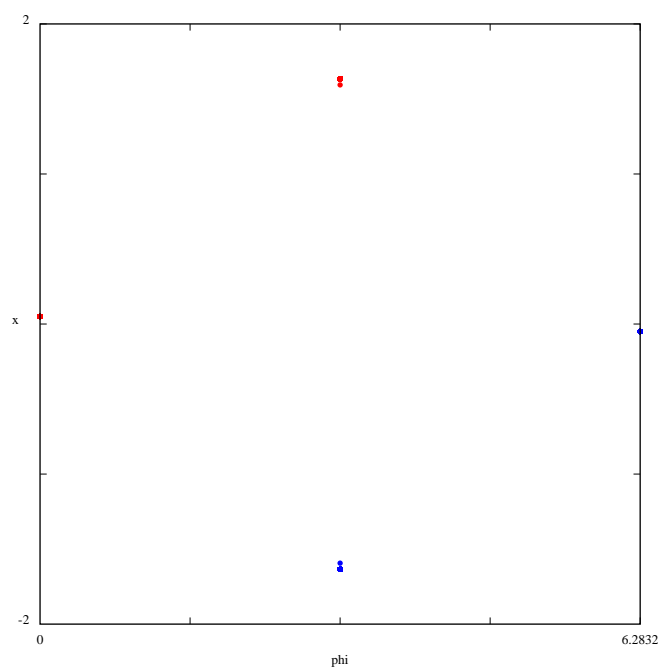


Figura 4.5: Mapa de Poincaré con $R = 1$ y $r = 0,3$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

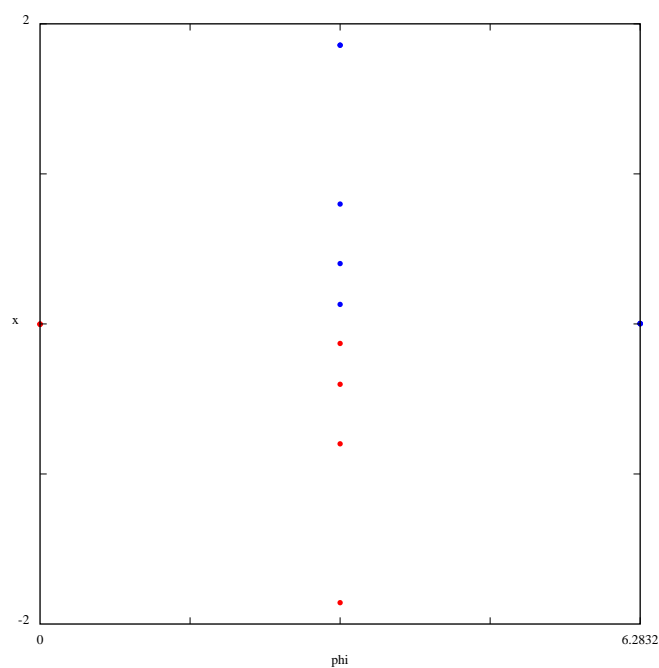


Figura 4.6: Mapa de Poincaré con $R = 1$ y $r = 0,3945$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

En las gráficas de las figuras 4.7 y 4.8 sólo se iterado un ciclo de φ , con lo que los conjuntos de puntos representados son:

- El rectángulo correspondiente a las condiciones iniciales (x_0, φ_0) .
- Una banda de puntos, siendo estos (x_1, φ_1) . Esta banda es tan estrecha que en las gráfica 4.7 y 4.8 parece una curva, aunque se puede ver que en algunos puntos tiene cierta anchura.

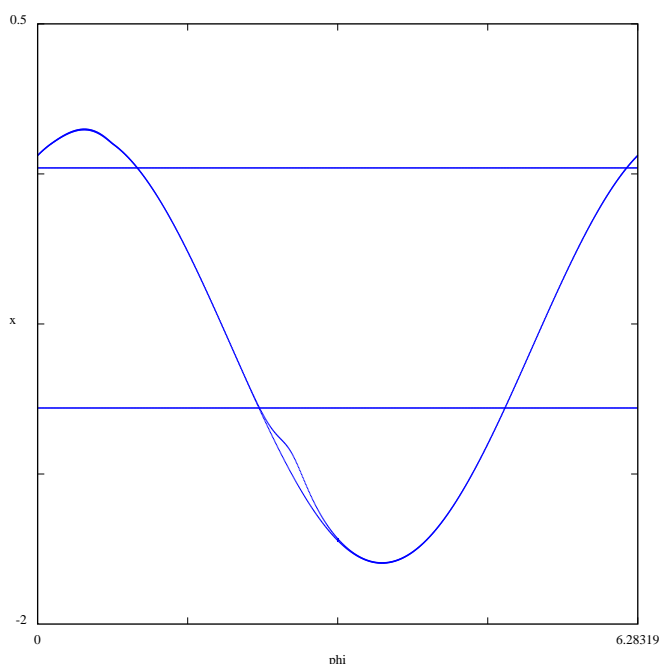


Figura 4.7: Múltiples c. i. con $R = 1$ y $r = 0,3$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

En la gráfica 4.7 podemos ver que, a pesar de haber usado distintas condiciones iniciales para la solución de la ecuación, las soluciones correspondientes residen todas cercanas a la superficie del toro, si bien a medida que aumentamos la amplitud se puede ver en la figura 4.8 con claridad la existencia de una zona para algunos valores de φ en la que las trayectorias de la solución escapan del atractor.

4.1.2. Número de rotación $\Omega = \frac{13}{21}$

Damos un salto en la secuencia de racionales que aproximan la sección áurea y elegimos $\frac{13}{21}$. Los resultados serán parecidos a los obtenidos en

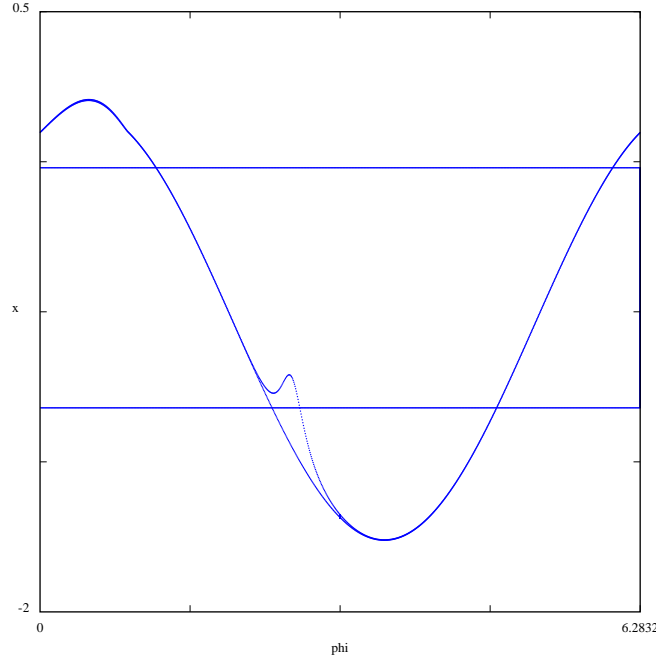


Figura 4.8: Múltiples c. i. con $R = 1$ y $r = 0,3495$ para $\Omega = \frac{1}{2}$

el apartado 4.1.1. Hacemos esto porque queremos observar un fenómeno que se produce con más facilidad a medida que la relación de frecuencias se aproxima más a un número irracional; $\Omega = \frac{13}{21}$ es un número que se aproxima bastante más a $W_G = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que el elegido en el apartado anterior.

Comenzamos utilizando una amplitud para la segunda excitación $r = 0,4$ y condiciones iniciales nulas. En este caso no se aprecia ningún efecto relevante: la solución está confinada en $x < 0$ para el tiempo hacia delante y en $x > 0$ con el tiempo hacia atrás.

Durante el proceso de resolución de la ecuación vamos aumentando r hasta observar algo destacable. Esto lo hacemos con ayuda de la sección de Poincaré de la solución, que serán presentadas más adelante. Particularmente, para $r = 0,55405$ tenemos un comportamiento ligeramente diferente al anterior. En este caso hay instantes de tiempo en que la trayectoria de la solución hacia delante pasa a estar en la zona de $x > 0$. El problema es que, al estar estudiando un caso donde $f(x)$ tiene dos zonas, y la zona de $x > 0$ tiene pendiente positiva, con un pequeño incremento en r es bastante fácil que el sistema se vuelva inestable.

Cuando realizamos la sección de Poincaré de la solución obtenemos una nube de puntos más densa, debido a que, al haber elegido una relación

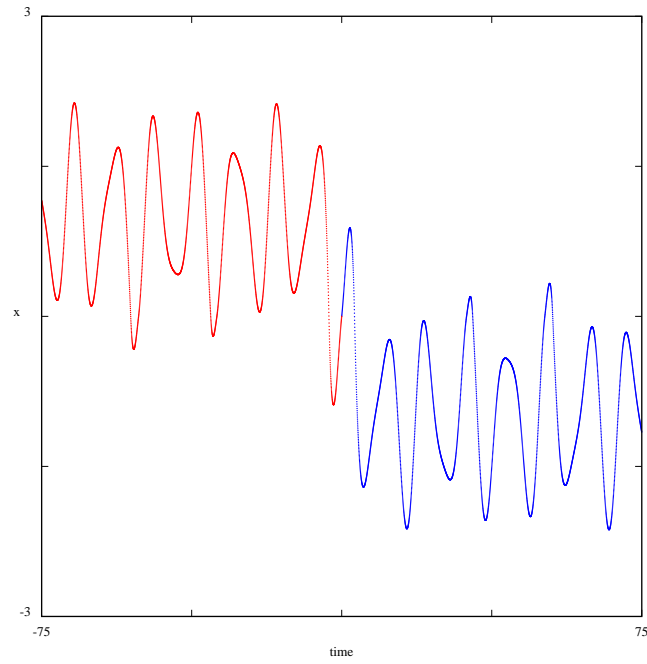


Figura 4.9: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0,4$ para $\Omega = \frac{13}{21}$

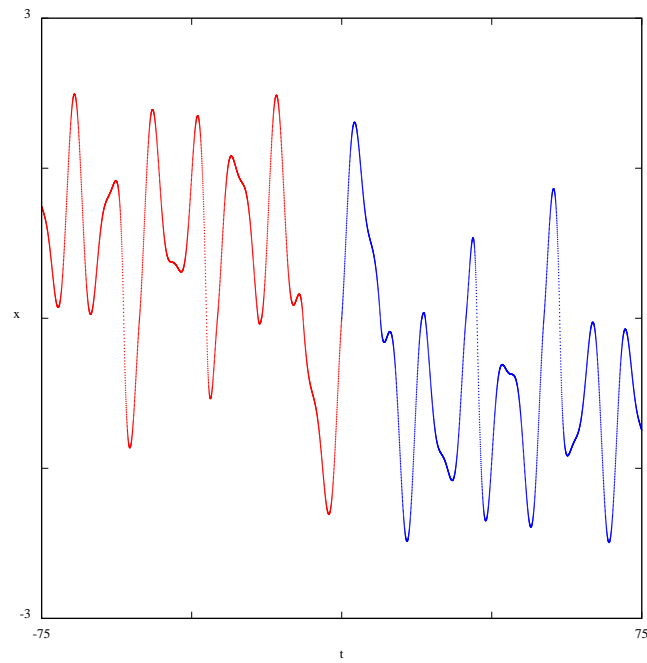


Figura 4.10: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0,55405$ para $\Omega = \frac{13}{21}$

de frecuencias $\Omega = \frac{13}{21}$, necesitamos iterar más en la obtención de la solución hasta que su trayectoria vuelve a intersectar con la superficie sobre la que pintamos la sección. Si observamos la gráfica, existen 21 puntos en la sección de Poincaré. Esto significa que la solución intersecta con la superficie 21 veces hasta que se completa un ciclo de φ . Nos encontramos pues ante una solución periódica pues la solución vuelve a pasar por los mismos puntos si seguimos avanzando en el tiempo.

Al aumentar la amplitud de $r = 0,55405$ se produce un fenómeno curioso, y es que uno de los puntos de la sección de Poincaré parece abandonar la estructura de puntos que tenía esta para amplitudes menores, como la de la gráfica 4.11. Esto lo podemos observar en la figura 4.12, donde comprobamos además que el punto que parece escapar de la nube de puntos casi llega a tocar la sección correspondiente a la solución con el tiempo hacia atrás (en rojo). Lo que este punto nos indica es que existen algunos instantes de tiempo en los que la solución intenta escapar del atractor que forma la solución para valores menores de r .

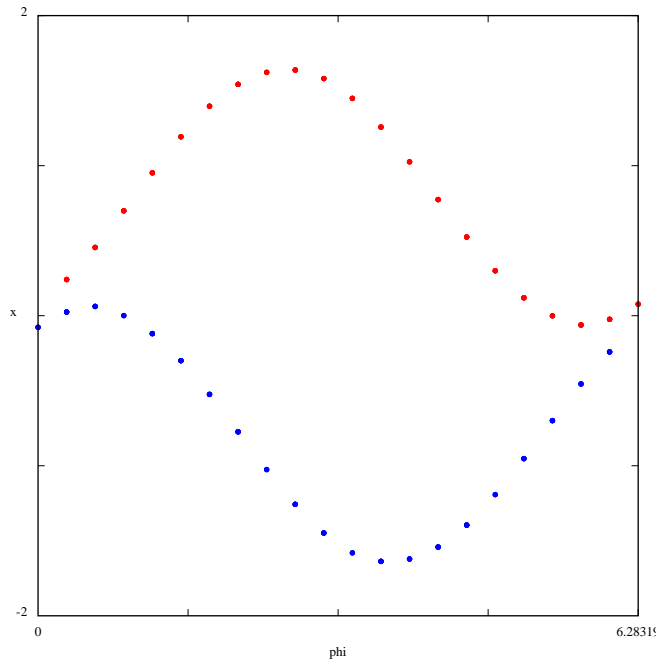


Figura 4.11: Sección de Poincaré con $R = 1$ y $r = 0,4$ para $\Omega = \frac{13}{21}$

Calculando la transformada de Fourier para ambas soluciones es posible obtener más información sobre lo que está pasando. En la tabla 4.1 vemos como en el primer caso sólo aparecen los tonos pertenecientes

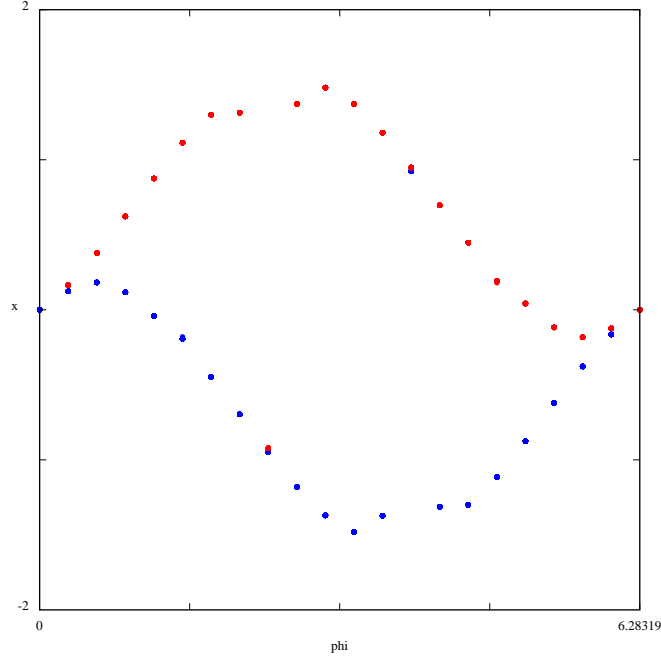
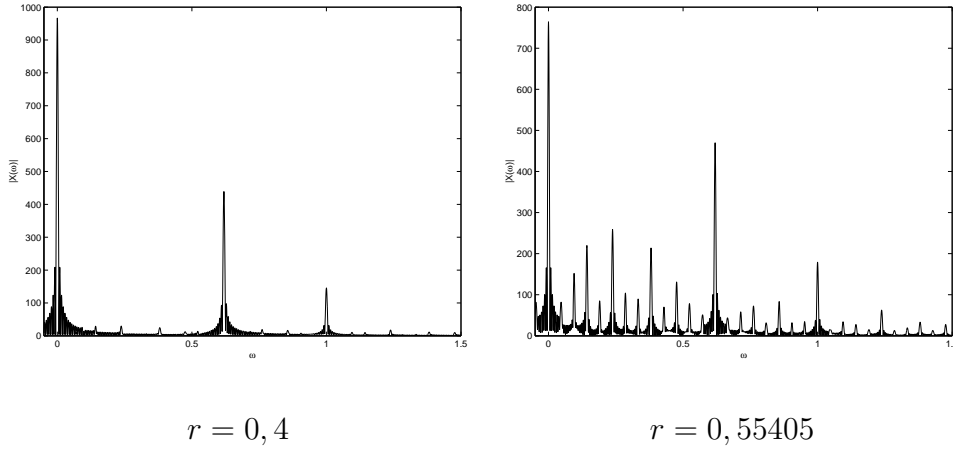


Figura 4.12: Sección de Poincaré con $R = 1$ y $r = 0,55405$ para $\Omega = \frac{13}{21}$

a las excitaciones, además de una componente de continua. Pero en el segundo caso aparecen multitud de tonos correspondientes a los subarmónicos de las excitaciones. Este es un ejemplo de lo que sucede en sistemas no lineales.

4.2. Número de rotación irracional: $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Pasamos ahora a ver el efecto de utilizar una relación de frecuencias irracional. En realidad hay que conformarse con el racional más cercano a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que es capaz de dar la máquina con la que estamos trabajando, ya que es imposible conseguir un irracional cuando se realizan operaciones de cálculo numérico; tal es el caso que nos ocupa. Se podría haber seguido realizando el estudio de otras aproximaciones racionales, pero estos casos no tienen un comportamiento muy distinto del de demás aproximaciones racionales. Por eso intentamos acercarnos lo más posible (tanto como nos permita la precisión del ordenador) a la relación de frecuencia mencionada en el título de la presente sección, que no es otra que el número de la sección áurea.

Cuadro 4.1: Comparación de los espectros de $x(t)$

Comenzamos tomando $R = 1$ y $r = 0$, para comprobar posteriormente el efecto que tiene sobre el sistema ir aumentando gradualmente la amplitud de la segunda excitación. Las condiciones iniciales tomadas son todas nulas, es decir, $x_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$. Seguimos trabajando con pendientes idénticas $b^\pm = \pm 1$. En primer lugar obtenemos la solución en el tiempo, tanto integrando hacia delante como hacia atrás. Podemos ver la evolución temporal de la solución en la figura 4.13. Se puede comprobar fácilmente que estos valores de amplitud y condiciones iniciales dan lugar a órbitas periódicas estables, tanto tomando el tiempo hacia delante como hacia atrás.

Si ahora representamos las intersecciones de la solución en el espacio de estado con la superficie para la cual $\theta = 0$ tenemos la sección de Poincaré. A diferencia de las gráficas anteriores del mismo tipo (las representadas para las aproximaciones racionales de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$), en la gráfica 4.14 se representa en azul los puntos de la sección de Poincaré para la integración hacia delante y en rojo, hacia detrás. Además se observa que esta vez tenemos una sección de Poincaré llena de puntos a lo largo de los valores que puede tomar φ . Esto es debido a que al haber elegido un irracional como relación de frecuencias las trayectorias sobre el toro son densas, tal y como se puede comprobar viendo la figura 3.7, en la que para un valor de θ , φ toma infinitud de valores. Otro aspecto interesante de estas gráficas es el hecho de que si nos fijamos bien, tienen forma de senoide. Esto se produce porque $r = 0$, a medida que aumentemos este parámetro se verá como las secciones de Poincaré se van deformando y pierden esta característica.

En las figura 4.15 se ve el aspecto que tienen los atractores que resultan

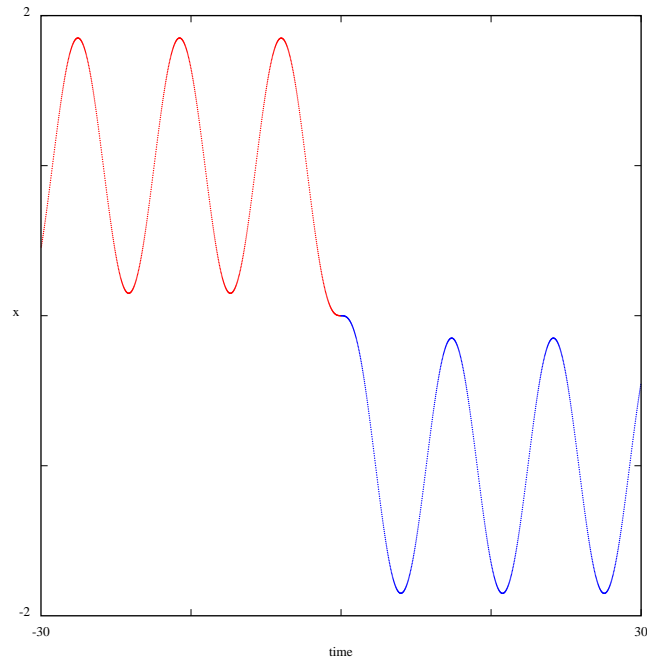


Figura 4.13: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0$ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

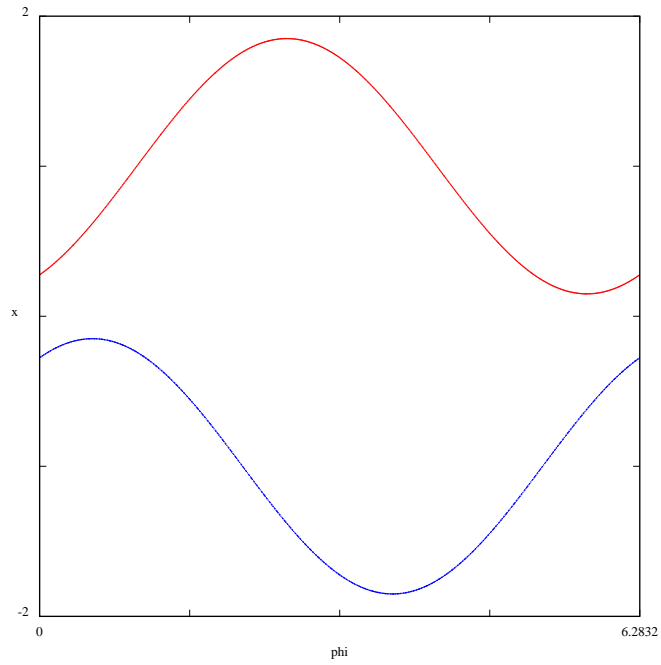


Figura 4.14: Secciones de Poincaré con $R = 1$ y $r = 0$ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

al representar la solución en el espacio de estados, esto es, la amplitud de la solución sobre la superficie de un toro.

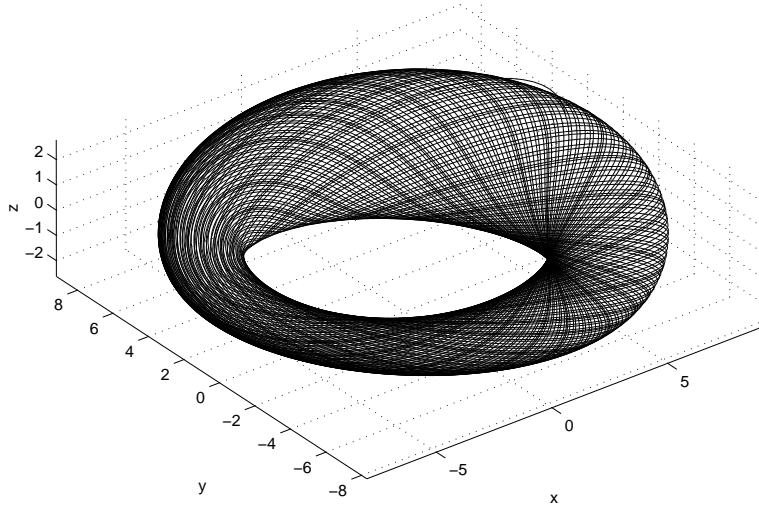


Figura 4.15: Atractor con el tiempo hacia delante para $R = 1$ y $r = 0$

A medida que se van aumentando las amplitudes se aprecia en la sección de Poincaré como ambas curvas, correspondientes a la integración con el tiempo adelante y el tiempo atrás, se aproximan en algunas zonas. Cuando las curvas, en realidad una serie de puntos (recordemos que esto es debido a la elección de una relación de frecuencias irracional), llegan a tocarse la solución se hace inestable. Con el software utilizado es posible encontrar valores de r que hacen que la solución aparente ser estable, y se usa la palabra aparente porque es posible comprobar que para algunos valores de r tras representar la solución para un valor de t lo suficientemente grande la solución acaba escapando del atractor y la solución deja de estar acotada, resultando el sistema inestable.

Haciendo uso de las gráficas de las tablas podemos ver como la solución parece intentar escapar al atractor que existe originalmente para $r = 0$. Podemos ver como el atractor se va deformando y el efecto que esto tiene en las transformadas de Fourier de la solución. Cuando esta deformación se va haciendo notable, en este caso para valores superiores a $r = 0,5$, comienzan a aparecer tonos a frecuencias distintas a las originales que proporcionan los forzamientos.

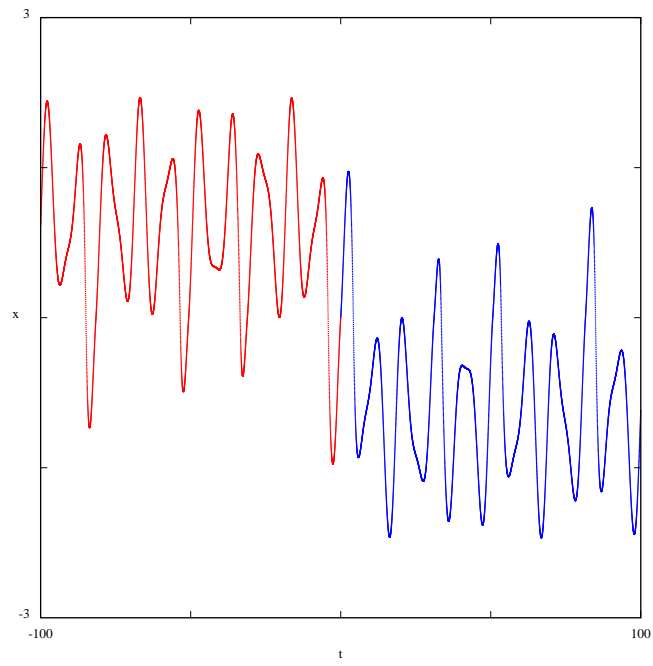


Figura 4.16: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0,5$ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

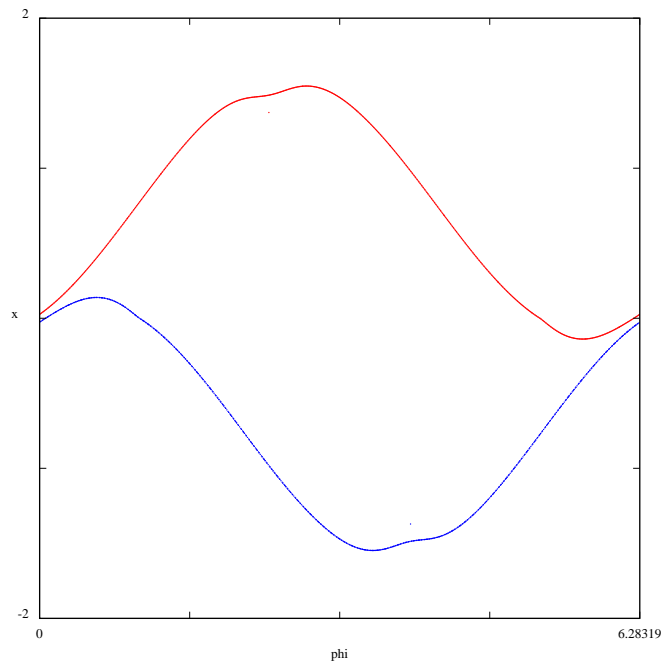


Figura 4.17: Sección de Poincaré con $R = 1$ y $r = 0,5$ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

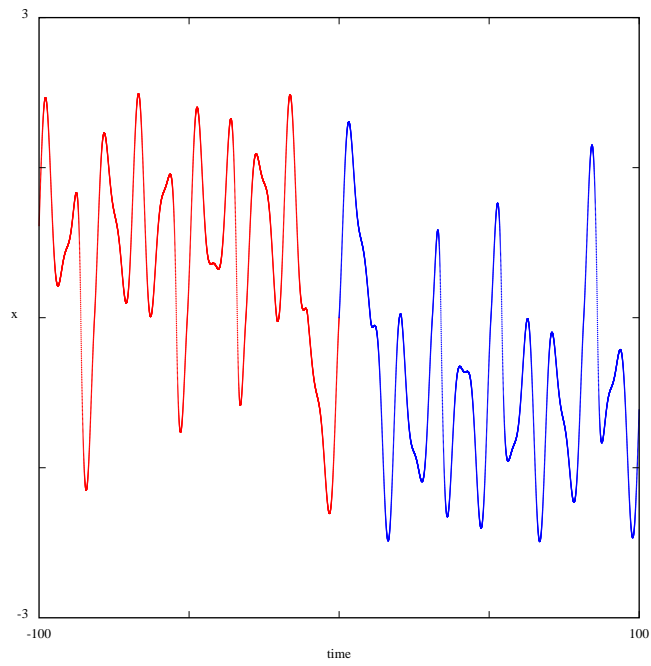


Figura 4.18: Solución temporal con $R = 1$ y $r = 0,55277$ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

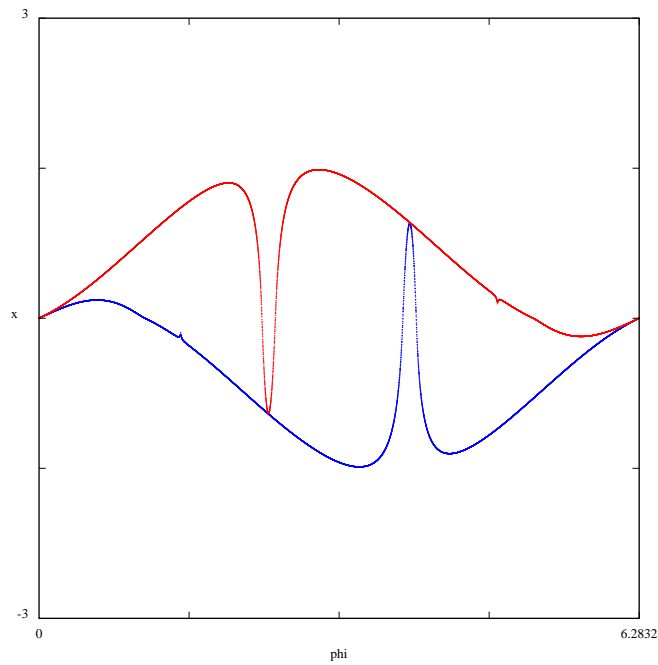


Figura 4.19: Sección de Poincaré con $R = 1$ y $r = 0,55277$ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

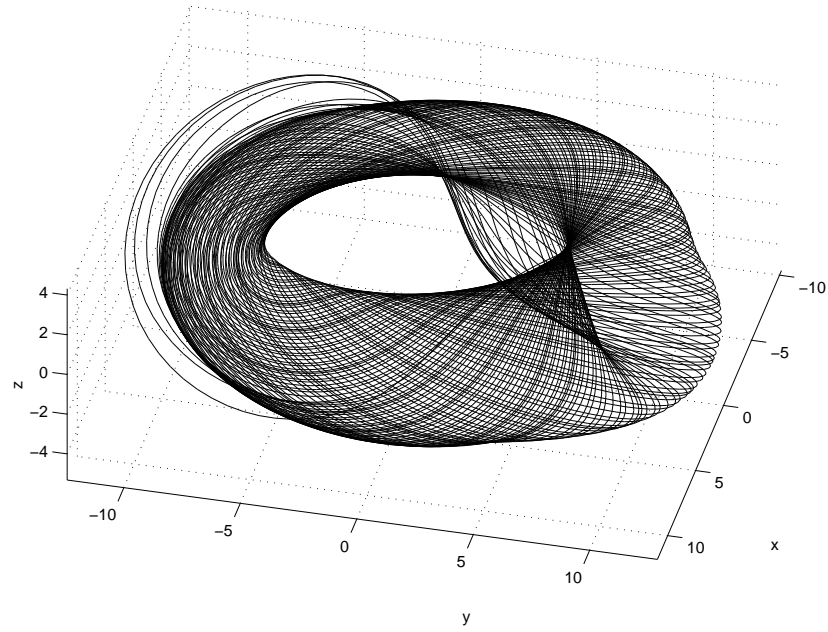
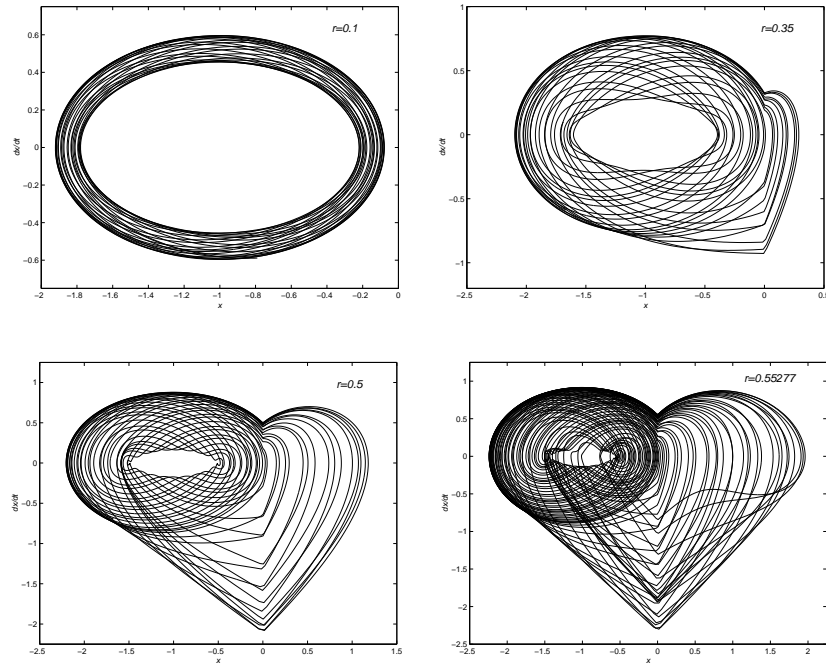
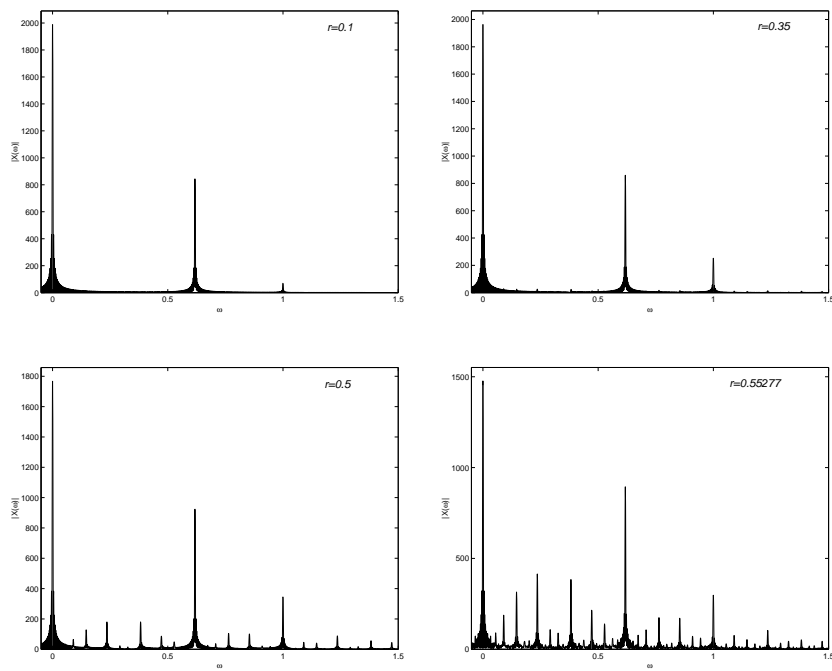


Figura 4.20: Atractor con $R = 1$ y $r = 0,55277$ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



Cuadro 4.2: $\dot{x}(t)$ frente a $x(t)$ para distintos valores de r y $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



Cuadro 4.3: Espectro de $x(t)$ para distintos valores de r y $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

