

Capítulo 3

Metodología

3.1. Introducción

Para estudiar el comportamiento del sistema haremos uso de distintas herramientas matemáticas que serán explicadas a lo largo de todo este capítulo. Vamos a aprovechar los resultados obtenidos en el estudio del sistema con un solo forzamiento para evaluar la influencia de introducir un forzamiento adicional. Presentamos a continuación la ecuación diferencial normalizada que es objeto de nuestro estudio.

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + R \cos(\Omega t) + r \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

Si se iguala $r = 0$ en la ecuación (3.1), eliminamos el segundo forzamiento y ésta puede ser escrita así:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + R \cos(\Omega t) \quad (3.2)$$

Usaremos la siguiente ecuación para explicar las gráficas que se presentarán a lo largo de esta memoria, así como para evaluar los cambios que ocurren en el sistema a medida que al valor de r va aumentando. Supondremos siempre que tanto R como r son números positivos.

3.2. Representación en el espacio de fases

Dado que conocemos la solución del sistema, expresada en las fórmulas (2.5) y que además disponemos de métodos numéricos que nos permiten conocer la solución en el tiempo en todo momento, preferimos introducir en este punto otra forma de aproximarnos al problema. Partiendo

de la fórmula (3.1), ésta puede ser reescrita de forma que aparezcan los argumentos de los cosenos como variables dependientes del tiempo pudiendo así redefinir las ecuaciones para dar lugar a un sistema con tres variables de estado.

$$x, \quad \varphi = \Omega t + \varphi_0, \quad \theta = t + \theta_0$$

El sistema quedaría descrito mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + R \cos \varphi + r \cos \theta \\ \dot{\varphi} &= \Omega \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Para resolver la tercera ecuación de (3.3) se impone como condición inicial que $\theta(t = 0) = 0$. También por comodidad y para las explicaciones que seguirán en esta sección del presente capítulo supondremos que $\varphi_0 = 0$, con lo que $\varphi(t = 0) = 0$.

Supongamos por simplicidad que no haya excitación periódica alguna en la primera ecuación de (3.3) y que $f(x) = bx$ con $b = -1$.

Como φ y θ son los argumentos de los cosenos, parece lógico pensar que se limite el conjunto de valores que pueden tomar a los contenidos en el intervalo $[0, 2\pi)$. Para ello no hay más que tomar el operador módulo 2π en dichas variables. Como resultado de haber normalizado previamente la ecuación, Ω representa la relación existente entre las frecuencias de ambos forzamientos. Podría parecer razonable representar la solución, en lugar de frente al tiempo, frente a los posibles valores que pueden tomar φ y θ . Para ello definimos el plano $\varphi\theta$ en el que vamos a representar la solución. Por el momento nos conformaremos con representar los valores que puede tomar θ frente a φ .

Vayamos un poco más lejos en la forma de representar la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales: los argumentos de los cosenos φ y θ pueden ser considerados como los ángulos que definen la superficie de un toro, sobre la cual, para cada valor de dichos ángulos, la solución puede ser representada. Tenemos la posibilidad de representar $x(t)$ en el espacio de tres dimensiones. Otra forma de llegar a la idea de representar la solución en un espacio tridimensional consiste en mapear la superficie del cuadrado de lado 2π , que ha sido mencionado antes, sobre la superficie de un toro. Esta superficie tendrá como parámetros φ y θ .

Las ecuaciones paramétricas que definen la superficie de un toro son las siguientes, siendo R_0 el radio mayor del toro y r_0 su radio menor.

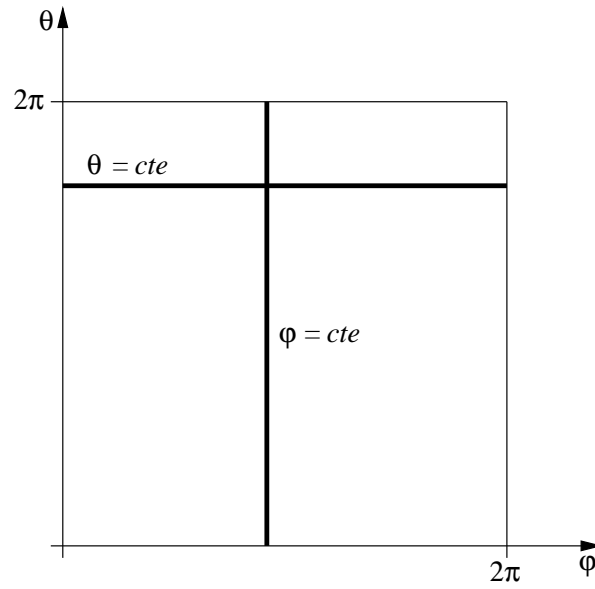
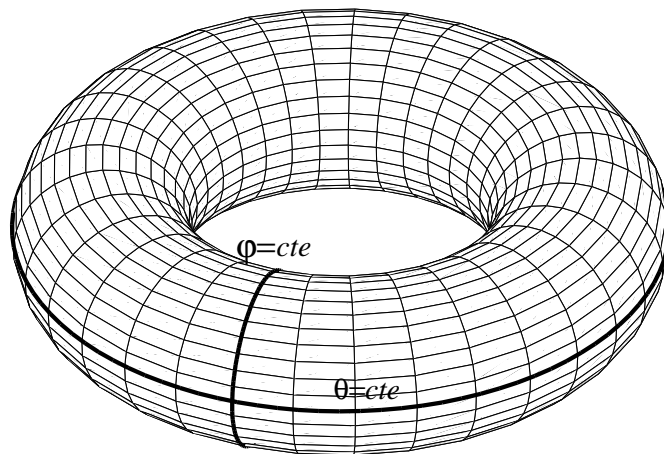
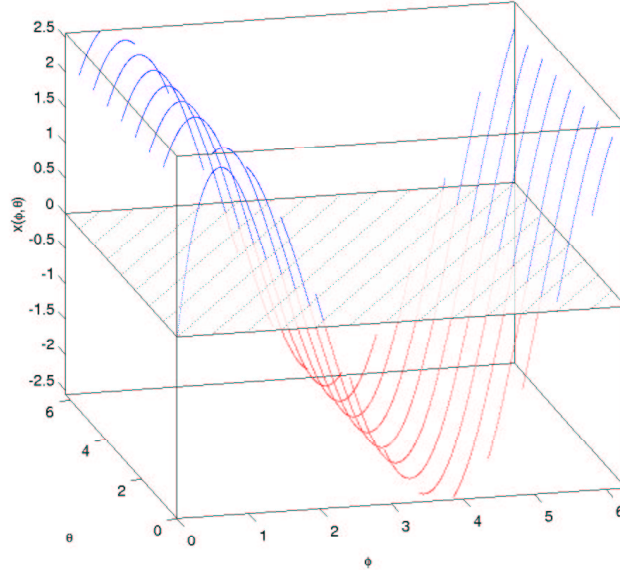
Figura 3.1: Espacio de fase definido por φ y θ 

Figura 3.2: Cuadrado mapeado sobre la superficie de un toro

Figura 3.3: Solución sobre el plano $\varphi\theta$

$$\begin{cases} x = [r_0 \sin \theta + R_0] \cos \varphi \\ y = [r_0 \sin \theta + R_0] \sin \varphi \\ z = r_0 \cos \theta \end{cases} \quad (3.4)$$

Para representar la solución sobre la superficie del toro no tenemos más que sustituir r_0 por $r_0 + x(t)$ en (3.4), así como los dos parámetros que definen dicha superficie por $\varphi = \Omega t$ y $\theta = t$, con lo que se obtendría (3.5), que es la descripción en paramétricas de la curva de la solución, siendo el parámetro t . Los valores correspondientes a $x(t) < 0$ estarán en la parte del espacio que encierra la superficie y los valores de la solución que cumplan $x(t) > 0$ estarán fuera.

$$\begin{cases} x = \{[r_0 + x(t)] \sin t + R_0\} \cos (\Omega t) \\ y = \{[r_0 + x(t)] \sin t + R_0\} \sin (\Omega t) \\ z = [r_0 + x(t)] \cos t \end{cases} \quad (3.5)$$

Simplificamos un poco más. Supongamos que $f(x) = -bx$ y además anulemos las excitaciones externas haciendo $R = r = 0$. Sabemos por los resultados obtenidos en el capítulo anterior que la solución correspondiente a este caso es una exponencial debida al transitorio que acaba extinguiéndose. En este caso la solución acabará rondando sobre la superficie del toro al ser $x(t) \simeq 0$ para valores suficientemente grandes de t . A

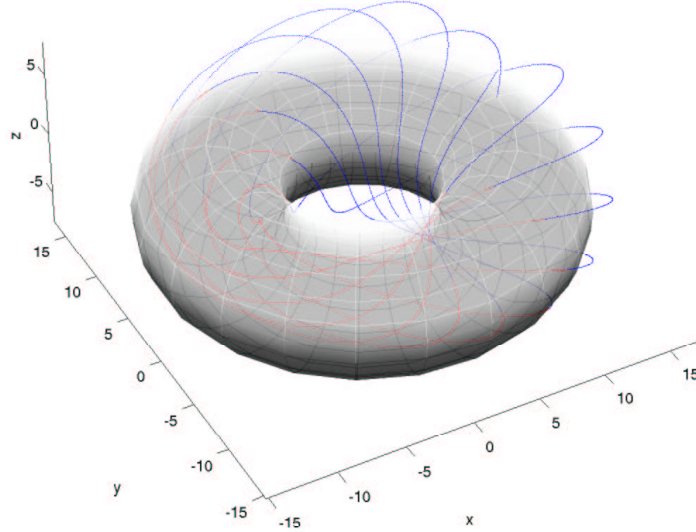


Figura 3.4: Solución sobre la superficie de un toro

medida que se vayan aumentando las amplitudes de las excitaciones las soluciones se alejarán y acercarán a la superficie previamente mencionada. Como ejemplo se representa la solución sobre el el cuadrado de lado 2π y se compara con su equivalente sobre la superficie del toro. Se eligen los siguientes valores numéricos como condiciones iniciales, $x_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$. Es obvio que la solución para la ecuación de x es siempre nula, sin embargo no sucede lo mismo para $\varphi = \Omega t$ y $\theta = t$. Las fases se representan tomando módulo 2π . Elegimos también una relación de frecuencias $\Omega = \frac{1}{8}$.

En la figura 3.5 representamos los posibles valores que pueden tomar φ y θ sobre el cuadrado de lado 2π . Observándola es fácil darse cuenta que la frecuencia correspondiente al segundo forzamiento es más rápida que la del primero; en efecto: cuando φ toma valores en el intervalo $[0, 2\pi)$, θ hace lo mismo pero ocho veces. Asimismo, en la figura 3.6 se incluye la gráfica correspondiente a representar la trayectoria de la solución en el espacio tridimensional sobre la superficie de un toro. En ella podemos comprobar como la trayectoria, al dar una vuelta completa en el sentido de variación del parámetro φ , da ocho en el sentido de θ . Este hecho está directamente relacionado con la elección de la relación de frecuencias $\Omega = \frac{1}{8}$.

Recordemos que en este caso Ω corresponde a la relación de frecuencias de la ecuación sin normalizar, i.e. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M}{N}$. Este número se conoce con

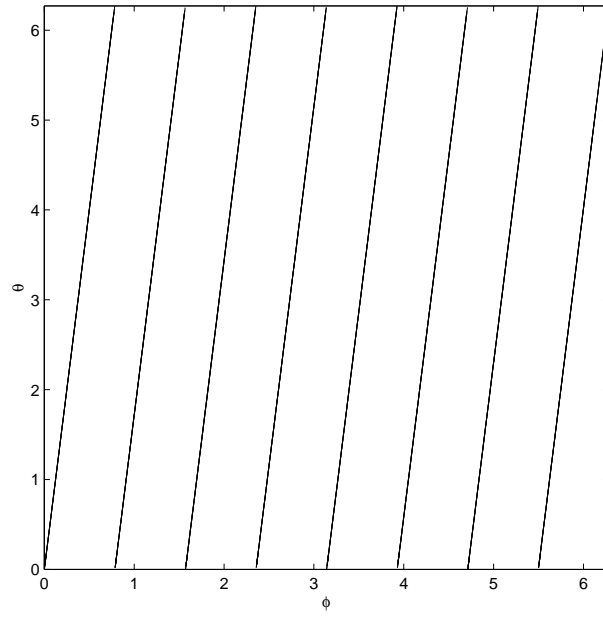


Figura 3.5: φ con respecto a θ para $\Omega = \frac{1}{8}$

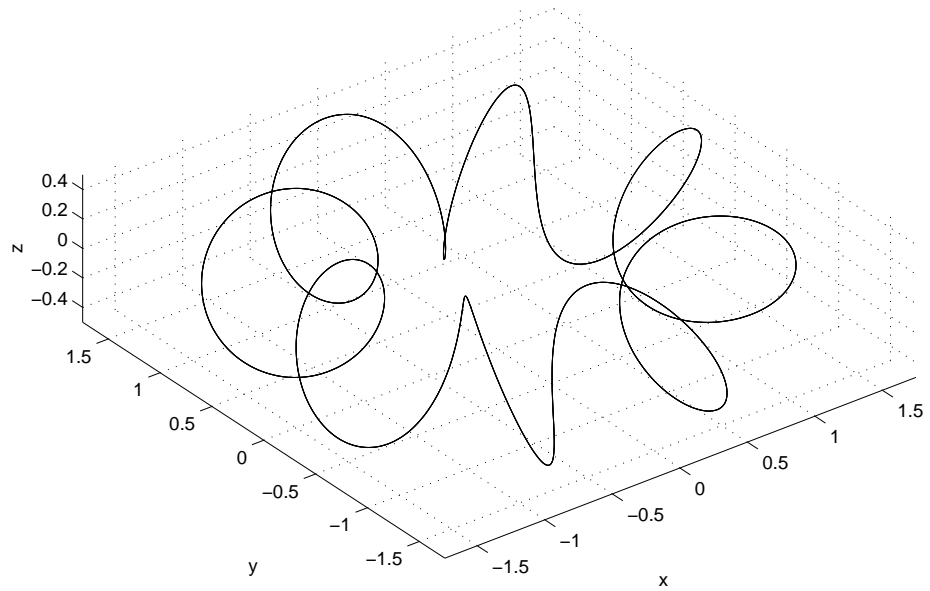


Figura 3.6: Trayectoria de la solución en el espacio para $\Omega = \frac{1}{8}$

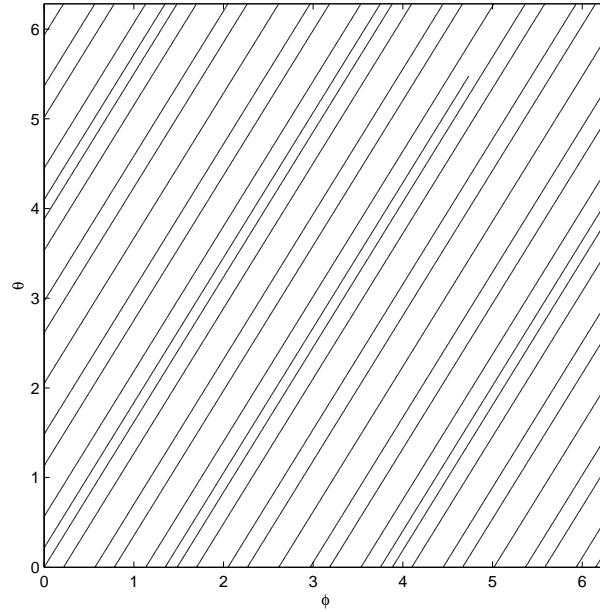


Figura 3.7: φ con respecto a θ para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

el nombre de número de rotación. Como se puede observar en la figura 3.6, la trayectoria de la solución corresponde a una curva cerrada. Esto es siempre cierto cuando elegimos una relación de frecuencias racional. Sin embargo, si se hubiese elegido una relación de frecuencias no racional el resultado habría sido distinto. Como ejemplo repetimos el ejemplo anterior, pero esta vez tomando una relación de frecuencias $\Omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

En la gráfica 3.7 podemos observar cómo el cuadrado se cubre de líneas, hasta casi cubrirlo por completo. Esto es lo que ocurriría si fuese posible, mediante el uso del ordenador, la representación de números irracionales. Realmente sería imposible cubrirlo por completo, puesto que entre dos números irracionales cualesquiera siempre hay otros números irracionales. Lo que extraemos de aquí es que para una relación de frecuencia irracional la trayectoria no se cerraría. Se puede comprobar este efecto si observamos también la figura 3.8, donde puede verse como la trayectoria gira a lo largo de la superficie del toro sin cerrarse.

Podemos decir que la superficie del toro forma un atractor, ya que las trayectorias tienden a acabar pegadas a él. Pero volvamos por un momento al ejemplo en el que $\Omega = \frac{1}{8}$. Las gráficas anteriores se habían dibujado bajo el supuesto de que ambas excitaciones eran nulas. Vamos a hacer ahora que una de ellas no lo sea dándole, por ejemplo, el valor $R = 1$.

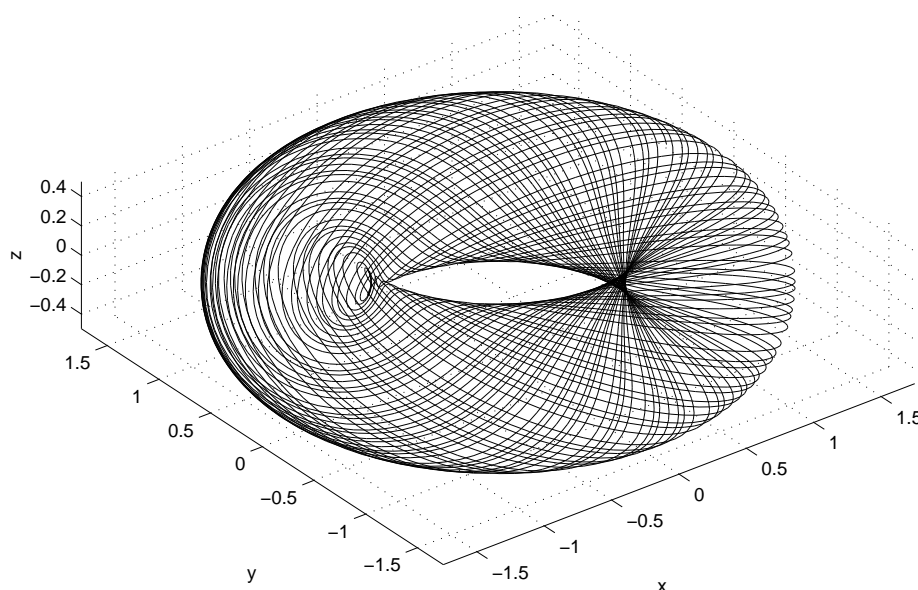


Figura 3.8: Trayectoria de la solución en el espacio para $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

El efecto de aumentar la amplitud de uno de los forzamientos será, como se puede comprobar en la gráfica (3.9) en una deformación del atractor del que hablábamos antes. La adición de una segunda excitación externa, haciendo $r > 0$, hace que el atractor se deforme aún más. También hay que tener en cuenta cuáles son las zonas que entran en juego. Sin embargo este punto será objeto de estudio en los capítulos siguientes, cuando se analicen los casos bizonal y trizonal.

En la figura 3.9 podemos observar que la amplitud de la solución varía según los valores que tomen φ y θ .

3.3. Sección de Poincaré

Hasta ahora, hemos descrito la solución del sistema como una evolución continua en el tiempo. Una forma alternativa de aproximarse al problema es observar el valor de la solución en ciertos intervalos discretos de tiempo T . Esta técnica es la que se aplica cuando se filma una secuencia, por ejemplo, cuando un movimiento continuo es simulado aproximadamente por medio de muestras durante intervalos de tiempo constante. De esta forma, una función continua $x(t)$, tal es el caso que nos ocupa, contiene una cantidad “infinita” de información puede ser reemplazada por

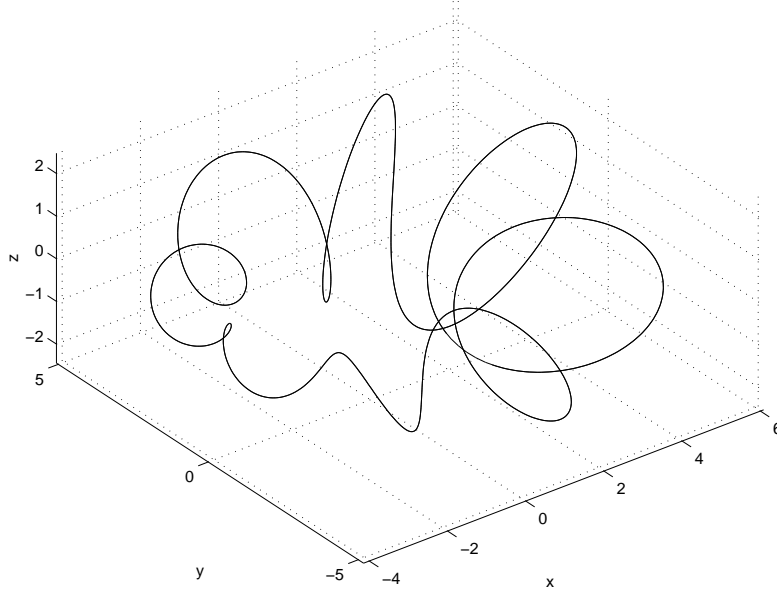


Figura 3.9: Trayectoria de la solución en el espacio para $\Omega = \frac{1}{8}$ y $R = 1$

una secuencia discreta de puntos

$$x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_k), \dots \quad (3.6)$$

donde

$$t = t_0 + kT \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Para asegurar que no se pierde información fundamental en la evolución de la trayectoria, es importante elegir un parámetro de discretización T adecuado.

En nuestro caso se van a elegir como instantes en los que tomamos la muestra de $x(t)$ aquellos en los que se cumpla que:

$$t_k = 2k\pi \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.8)$$

Como antes habíamos normalizado la escala del tiempo, en la resolución de la ecuación escalada t es el valor del argumento del segundo forzamiento, es decir θ . Podemos enfocar este hecho de dos formas:

- Viendo la solución frente al tiempo, esto no es más que tomar muestras de la solución $x(t = t_k)$.

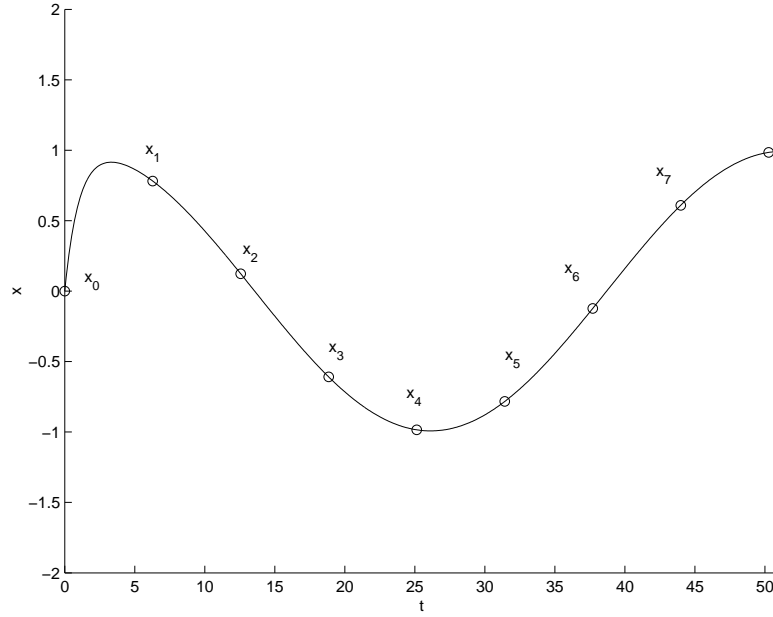


Figura 3.10: Muestreo de la solución $x(t = t_k)$

- Usando la definición de la curva dada por (3.5) se representa sobre la superficie de un toro con parámetros φ, θ y radios mayor y menor R_0 y r_0 respectivamente, tal y como se describe en (3.4). A continuación se dibuja un cilindro con radio R_0 , el cual es una superficie en la que el parámetro θ del toro es constante e igual a cero (lo que equivale a decir que $\theta = 2k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$)). Las intersecciones con la superficie del cilindro que se encuentran marcadas mediante pequeños círculos y nombradas como x_k en la figura (3.11). Imaginemos que abriremos el cilindro conservando las marcas que han dejado las intersecciones antes mencionadas y lo proyectamos sobre un plano; entonces veríamos que éstas coinciden exactamente con las correspondientes a los instantes t_k de la figura (3.10).

Podríamos representar estos valores como una secuencia $x_k = x(t = t_k)$, sin embargo esto no nos aportaría tanta información como en el caso de representar estos valores de forma que estuviesen representados frente al valor de $\varphi = \Omega t$ correspondiente. Podemos calcular estos valores de φ_k a los cuales corresponde un valor x_k y podremos representar los pares de puntos (x_k, φ_k) sobre el plano.

$$\varphi_k = \varphi(t = t_k) = \Omega t_k = 2k\pi\Omega \quad (3.9)$$

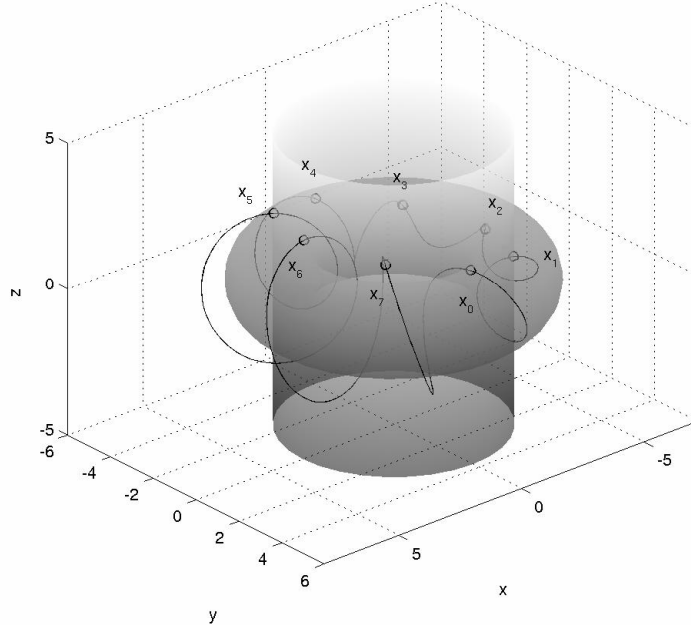


Figura 3.11: Trayectoria de la solución en el espacio para $\Omega = \frac{1}{8}$ y $R = 1$

Si se toma módulo 2π en 3.9 entonces es posible representar estos valores de x_k dentro del intervalo $\varphi = [0, 2\pi)$.

Definiremos la aplicación de Poincaré como:

$$\Pi^k(x_n, \varphi_n) = (x_{n+k}, \varphi_{n+k}) \quad (3.10)$$

Si se ha alcanzado el estado estacionario, sucesivas representaciones de estos puntos coincidirán con puntos dibujados con anterioridad a partir de un cierto índice k . Otra particularidad que podemos decir sobre estos puntos es que, en esta forma de representación es que el número de puntos que aparecerá en la gráfica corresponde con el denominador de la relación de frecuencias $\Omega = \frac{M}{N}$. Podemos comprobar esto si observamos las gráficas. Este método de representación es llamado a menudo técnica estroboscópica. Su ventaja es obvia: la solución estacionaria está representada por puntos fijos. Además hemos reducido el orden del sistema en uno (si bien originalmente el sistema era de una sola variable de estado, aunque lo ampliamos a uno de tres de forma artificial).

Algunas consideraciones sobre el número $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Uno de los objetivos de este trabajo es analizar el comportamiento en un oscilador doblemente forzado cuando existe una relación de frecuencias irracional, con lo que tendríamos una excitación cuasi-periódica. Para ello hemos elegido $W_G = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como dicha relación.

Si dividimos un segmento de tal forma que la razón entre la sección más larga a con la longitud total l sea la misma que la existente entre la longitud de la más corta y la longitud total l , es decir

$$\frac{a}{l} = \frac{l-a}{a}.$$

Esta división del segmento de longitud l de esta forma recibe el nombre de sección áurea. Para la fracción $\frac{a}{l}$, se deduce la relación

$$\left(\frac{a}{l}\right)^2 + \frac{a}{l} - 1 = 0$$

Sólo el valor positivo $\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es posible como solución.

Los números irracionales contenidos en el intervalo $(0, 1)$ pueden ser representados por fracciones continuas infinitas, definidas como

$$W = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}} = \langle n_1 \ n_2 \ n_3 \dots \rangle \quad (3.11)$$

donde n_i son números naturales. Al truncar esta fracción después de un número finito de lugares n_k , se obtiene un fracción continua finita correspondiente a un número racional. La sección áurea W_G tiene una representación como fracción continua particularmente sencilla

$$W_G = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \langle 1 \ 1 \ 1 \dots \rangle. \quad (3.12)$$

Directamente de esta ecuación podemos extraer la relación

$$W_G = \frac{1}{1 + W_G}, \quad (3.13)$$

que puede ser reescrita como $W_G^2 + W_G - 1 = 0$ y tiene la solución $W_G = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ahora podemos aproximar W_G por la secuencia de números racionales deducidos mediante truncación de la fracción continua definida en

(3.12).

$$\begin{aligned}
W_1 &= \langle 1 \rangle = \frac{1}{1} \\
W_2 &= \langle 1 \ 1 \rangle = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\
W_3 &= \langle 1 \ 1 \ 1 \rangle = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{2}{3} \\
&\vdots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Tradicionalmente, en cálculo numérico y experimentos, se ha elegido W_G preferentemente como número de rotación, debido a que posee la representación en forma de fracción continua más sencilla, con la característica de que la secuencia de números racionales W_n resultante de la truncación de la fracción continua infinita es la secuencia con el incremento monótonico más pequeño de los denominadores y por ello converge hacia W_G de forma bastante lenta.

3.4. Caracterización de atractores con la ayuda de la autocorrelación y el espectro de densidad de potencia

En las secciones anteriores nos hemos limitado a ver la solución de la ecuación como una secuencia temporal: representándola como una señal continua en el tiempo, o tomando muestras de esta señal. También ha sido representada en el espacio de fases, si bien esto no deja de ser otra forma de ver la evolución temporal de la solución. Pero en lo que estamos interesados es en obtener un criterio que nos permita caracterizar de forma inequívoca la naturaleza del atractor que se obtiene al resolver la ecuación que nos ocupa. En primer lugar presentamos dos métodos clásicos que están relacionados el uno con el otro, concretamente la autocorrelación y el espectro de densidad de potencia.

3.4.1. Autocorrelación

Una herramienta muy usada en procesamiento de señal es la correlación de dos funciones f_1 y f_2

$$\text{corr}(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt \quad (3.14)$$

Haciendo uso de esta definición, definimos la autocorrelación de una señal como la correlación de ella consigo misma:

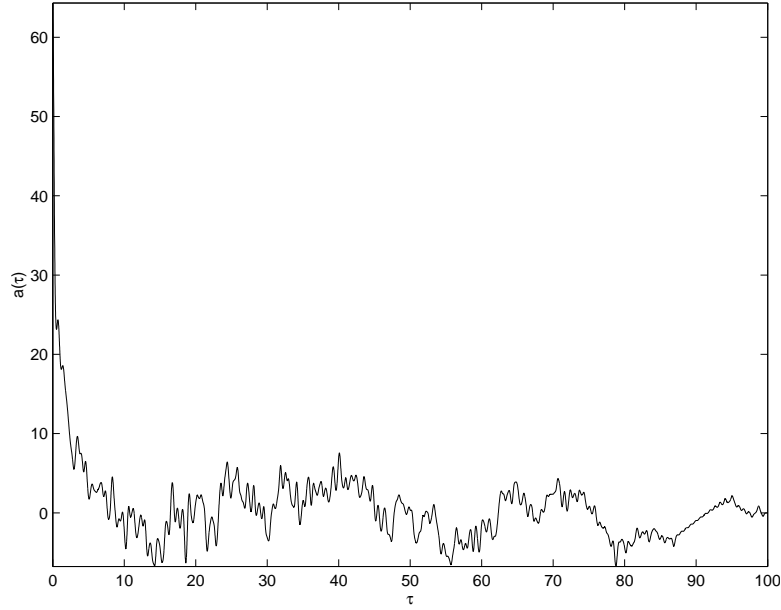


Figura 3.12: Autocorrelación de un movimiento caótico

$$\text{corr}(f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) f(t) dt \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) define la interrelación de la señal con ella misma en dos instantes de tiempo distintos, t y $t + \tau$, y es una función del desplazamiento temporal τ . Se puede decir que medimos el parecido de la señal consigo misma a lo largo del tiempo.

Para señales periódicas se define la autocorrelación como el valor medio

$$\bar{a}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t + \tau) f(t) dt \quad (3.16)$$

Esta autocorrelación media $\bar{a}(\tau)$ puede ser usada para caracterizar atractores extraños. Consideremos un sistema que para $t \rightarrow \infty$ desemboque en un comportamiento caótico; en tal caso, la correlación temporal entre $f(t)$ y $f(t + \tau)$ se desvanece gradualmente, i.e. $\bar{a}(\tau) \rightarrow 0$ para $\tau \rightarrow \infty$. Esto significa que en el tiempo, el sistema pierde la memoria de los estados iniciales. Podemos ver este efecto en la figura 3.12.

Por otra parte, si $f(t)$ se trata de un ruido blanco, es decir, de un comportamiento estocástico y totalmente aleatorio; entonces no hay conexión entre la señal en el instante t y $t + \tau$. Representando la autocorrelación

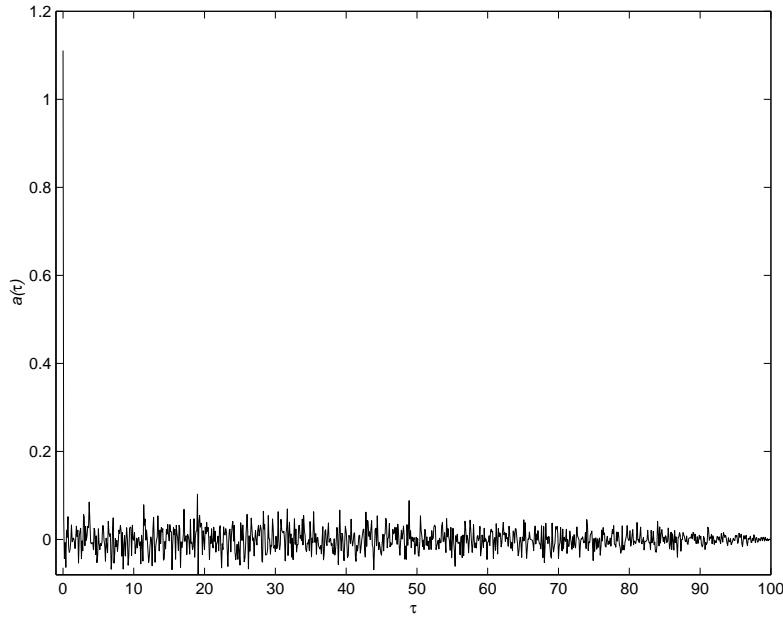


Figura 3.13: Autocorrelación de un movimiento aleatorio

(ver figura 3.13) observamos que esta presenta un único pico en $\tau = 0$ y después vale cero para los demás valores de τ .

3.4.2. Espectro de densidad de potencia

Otra forma de analizar el problema es haciendo uso del espectro de densidad de potencia, que se define como:

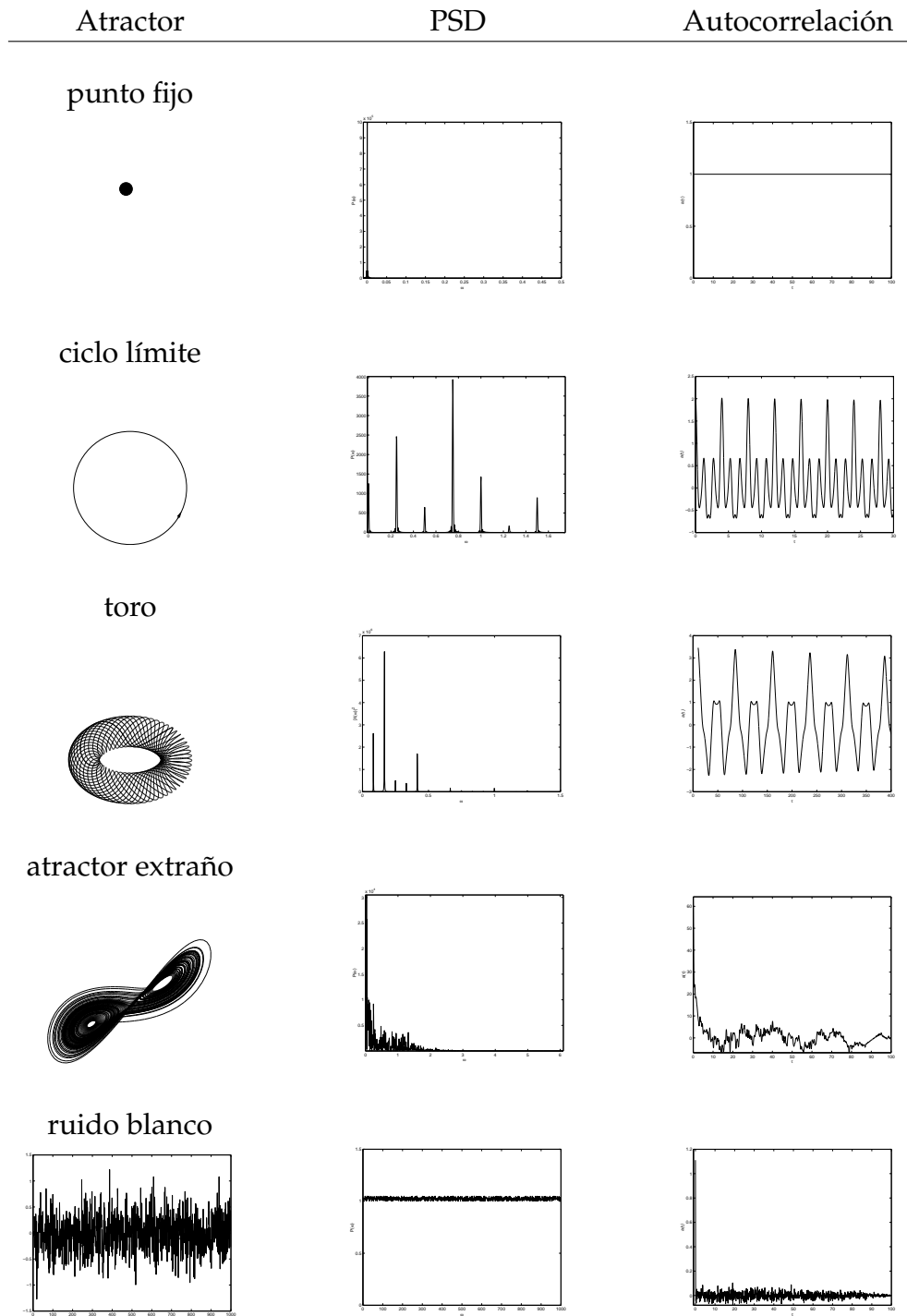
$$P(\omega) = |F(\omega)|^2 \quad (3.17)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal, a saber:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.18)$$

Esta medida está íntimamente relacionada con la autocorrelación, pues es la transformada de Fourier de esta última. Es decir, si $a(\tau)$ es la autocorrelación de $f(t)$, entonces se da la siguiente relación:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.19)$$



Cuadro 3.1: Clasificación de atractores

Si queremos analizar y clasificar un proceso dinámico que depende de un parámetro de control, el espectro de densidad de potencia es particularmente apropiado para el reconocimiento de posibles desdoblamientos de períodos o de la aparición de nuevas frecuencias base. ¿Cómo se puede distinguir caos determinista de un proceso periódico o de un ruido blanco? En el caso de un comportamiento completamente aleatorio, no hay, por definición, conexión entre las señales en varios puntos en el tiempo, i.e. la autocorrelación está formada por un único impulso en $\tau = 0$.

Por otra parte, el comportamiento caótico está caracterizado por el hecho de que el espectro de densidad de potencia está formado por una banda ancha continua de frecuencia, posiblemente acompañada por singulares picos característicos. Además la autocorrelación muestra claramente que la memoria del estado inicial se pierde gradualmente, es decir, la relación entre dos señales en los instantes t y $t+\tau$ tiende a cero para diferencias de tiempo τ lo suficientemente grandes.

Por último, es importante notar que, debido a la necesidad de utilizar métodos numéricos para la obtención del espectro de densidad de potencia es posible que algunas características que nos permiten la clasificación de atractores no se haga visible. Por ejemplo, se usa el algoritmo de la FFT para calcular la PSD y además se tiene la limitación de no poder realizar los cálculos con una secuencia infinita de valores en el tiempo, tal y como se desprende que debería ser viendo la definición de densidad espectral de potencia en (3.19).

3.5. La aplicación de herradura

La aplicación de herradura es el paradigma de los mapas caóticos. Su dinámica puede ser actualmente analizada; su naturaleza caótica está bien definida y es bien comprendida. Un método para probar que un sistema es caótico consiste en comprobar si contiene una herradura.

En el caso de nuestro sistema, tomaremos un conjunto de condiciones iniciales y obtendremos el valor de la imagen de esos puntos mediante una aplicación que consistirá en integrar la solución de la ecuación diferencial hasta que se dé una condición; más concretamente, hasta que se dé la condición $\theta = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Estamos representando la sección de Poincaré de nuestro sistema sobre el plano $[\varphi, x]$. El método consistirá en tomar en un conjunto de puntos de dicho plano que formen un rectángulo y observar su imagen una vez hayamos iterado una vez para encontrar la solución de la ecuación. Explicamos paso por paso cuál es el método a seguir:

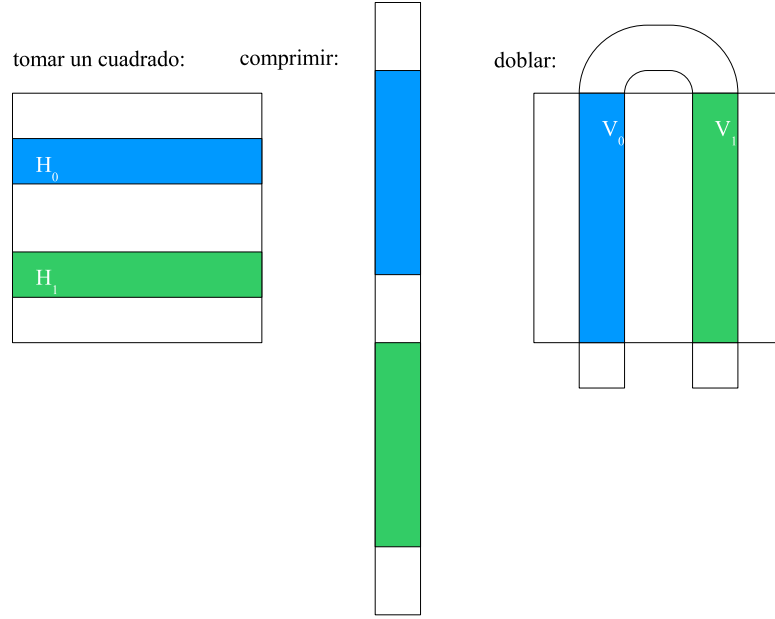


Figura 3.14: Aplicación de herradura

- Tomamos varias condiciones iniciales, $(\varphi, x) \in [\varphi^{(1)}, x^{(1)}] \times [\varphi^{(2)}, x^{(2)}]$.
- Resolvemos la ecuación diferencial para cada una de estas condiciones iniciales y obtenemos el valor de la solución para la primera iteración en la integración de la solución, es decir, para $\theta_k|_{k=1} = 2k\pi|_{k=1} = 2\pi$.
- Representamos todos estos puntos sobre el plano (φ, x) y observamos la intersección con el rectángulo original de condiciones iniciales.

3.5.1. Definición de la aplicación herradura

Sean $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ y $2 < \mu$. Sea:

$$\begin{aligned}
 D &= [0, 1] \times [0, 1] \\
 H_0 &= \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [a, a + 1/\mu]\} \\
 H_1 &= \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [b, b + 1/\mu]\}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

con a y b tales que $b + \frac{1}{\mu} < a < 1 - \frac{1}{\mu}$ y $b > 0$.

La aplicación de herradura f mapea cualquier punto que esté fuera de $H_{0,1}$ fuera del cuadrado D y actúa linealmente sobre $H_{0,1}$ como sigue

(eligiendo a, b, A, B apropiadamente):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{pmatrix} A \\ -\mu a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ para } (x, y) \in H_0 \\ f(x, y) &= \begin{pmatrix} B \\ \mu b + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ para } (x, y) \in H_1 \\ f(x, y) &\notin D \text{ para } (x, y) \notin H_0 \cup H_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} V_0 &= f(H_0) = \{(x, y) \mid y \in [0, 1], x \in [A, A + \lambda]\} \\ V_1 &= f(H_1) = \{(x, y) \mid y \in [0, 1], x \in [B, B + \lambda]\} \end{aligned}$$

3.6. Exponentes de Lyapunov

Siguiendo la discusión sobre la autocorrelación y el espectro de potencia, presentamos un criterio más para distinguir atractores: los exponentes de Lyapunov. En el caso de la autocorrelación y el espectro de potencia, la información básica es obtenida mediante histogramas; el método para determinar los exponentes de Lyapunov hace uso del comportamiento exponencialmente divergente o convergente de trayectorias vecinas en el espacio de fases.

El concepto de los exponentes de Lyapunov nos permite hacer afirmaciones considerando la estabilidad de ciertas trayectorias. Los atractores normales (el punto fijo, el ciclo límite y el toro) poseen tal fuerza atractiva que todas las trayectorias vecinas en una zona próxima convergen asintóticamente en el atractor y las órbitas vecinas quedan igual. Los atractores extraños también atraen todas las trayectorias en una particular cuenca de atracción; sin embargo, en el atractor, trayectorias que originalmente estaban próximas unas a otras divergen exponencialmente. Así pues queda claro que es posible clasificar los distintos tipos de atractores en función del comportamiento, en cuanto a estabilidad se refiere, de un sistema dinámico.

Tomando una trayectoria de referencia $\mathbf{x}_r(t)$ para la cual se satisface que $\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_r)$, observamos una trayectoria vecina a una distancia infinitesimal que corresponde a una pequeña perturbación inicial $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$. Estamos interesados en el comportamiento asintótico ($t \rightarrow \infty$) de la perturbación $\tilde{\mathbf{x}}(t)$; expandimos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en una serie de Taylor en las proximidades de $\mathbf{x}_r(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_r(t) + \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_r(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_r(t)) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_r(t)} \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}$$

Ignorando los términos de orden superior en $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas que tiene una matriz de coeficientes dependientes del tiempo.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_r(t)} \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.22)$$

Se puede demostrar que la solución $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ existe para cada condición inicial $(t_0, \tilde{\mathbf{x}}(t_0))$ con la condición de que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sea continuamente diferenciable. Este sistema posee un vector fundamental de n soluciones y una matriz fundamental $\Phi(t, t_0)$ tal que la ecuación (3.22) puede ser expresada formalmente como

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, t_0) \tilde{\mathbf{x}}(t_0) \quad (3.23)$$

Esta relación puede ser interpretada como un mapa lineal de dos espacios vectores. Por medio de la matriz $\Phi(t, t_0)$, el vector $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ perteneciente al espacio tangente \mathbb{E}_0 del flujo en el punto $\mathbf{x}_r(t_0)$ es mapeado en el vector imagen $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ asociado con el correspondiente espacio tangente \mathbb{E}_t en el punto $\tilde{\mathbf{x}}_r(t)$, donde

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

se aplica. El exponente de Lyapunov del vector $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ con respecto a la trayectoria de referencia $\mathbf{x}_r(t)$ está dado por

$$\sigma_{\mathbf{x}_r}(\tilde{\mathbf{x}}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\tilde{\mathbf{x}}(t)|}{|\tilde{\mathbf{x}}(t_0)|} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\tilde{\mathbf{x}}(t)| \quad (3.24)$$

Para garantizar que $\sigma_{\mathbf{x}_r}$ es finito, suponemos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\Phi(t, t_0)| < \infty$$

La idea básica es que la influencia del transitorio se vuelve irrelevante una vez hemos tomado la media de las perturbaciones infinitesimales con respecto al tiempo para $t \rightarrow \infty$ y nos fijamos en que solo el comportamiento a largo plazo conserva su significado.

Dos características importantes se derivan de la definición de la ecuación (3.24):

i. si seleccionamos cualquier número real $c \neq 0$, entonces

$$\sigma_{\mathbf{x}_r}(c\tilde{\mathbf{x}}) = \sigma_{\mathbf{x}_r}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.25)$$

ii. de las características de espacios vectores lineales

$$\sigma_{\mathbf{x}_r}(\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_2) \leq \max\{\sigma_{\mathbf{x}_r}(\tilde{\mathbf{x}}_1), \sigma_{\mathbf{x}_r}(\tilde{\mathbf{x}}_2)\} \quad (3.26)$$

La definición de (3.24) es aún insatisfactoria en dos aspectos: primero, sería preferible reemplazar el límite superior por un límite ordinario; segundo, debido a las ecuaciones (3.22) y (3.23), σ no sólo depende de la dirección de la perturbación inicial $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ sino también de la trayectoria de referencia seleccionada $\tilde{\mathbf{x}}_r(t)$.

Volvamos a las propiedades (3.25) y (3.26) para el exponente de Lyapunov σ . Se extrae directamente de estas relaciones que todos los vectores $\tilde{\mathbf{x}}$ para los cuales el exponente de Lyapunov es menor o igual que un cierto número real r , i.e. $\sigma(\tilde{\mathbf{x}}) \leq r$, forman un subespacio vectorial \mathbb{E}_0 . De esto se puede deducir que el exponente de Lyapunov que depende de $\tilde{\mathbf{x}}$ puede tomar como mucho n valores diferentes, donde $n \leq \dim \mathbb{E}_0$ coincide con la dimensión del espacio de fases. A estos n valores se les designa con el nombre de espectro de los exponentes de Lyapunov y pueden ser ordenados de acuerdo con su magnitud.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

Asumimos que esta secuencia contiene precisamente s valores diferentes que denotamos con ν_k

$$\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_s \quad (1 \leq s \leq n)$$

Siguiendo las consideraciones anteriores, a cada ν_k le pertenece un espacio vectorial

$$\mathbb{L}_k = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{E}_0 \quad \text{con} \quad \sigma(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \nu_k\}$$

Estos s subespacios lineales encajan uno en otro

$$\mathbb{E}_0 \supset \mathbb{L}_1 \supset \mathbb{L}_2 \supset \dots \supset \mathbb{L}_s$$

Podemos determinar una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ en \mathbb{E}_0 de tal forma que los vectores de la base se extienden a los supespacios. Obviamente, esta base no es determinable de forma única; sólo tiene que satisfacer la condición de que perturbaciones en la dirección de los vectores de la base cumplan que

$$\sigma(\mathbf{e}_i) = \sigma_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.27)$$

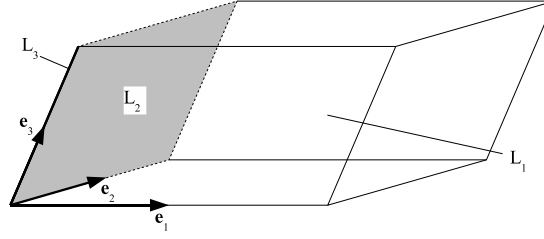


Figura 3.15: Subespacios lineales y vectores de la base para el cálculo de los exponentes de Lyapunov

Comenzando desde el subespacio \mathbb{L}_s con la dimensión más baja, podemos seleccionar los vectores de la base de tal forma que forman una base ortonormal. Es ahora fácil deducir que en general, para cualquier perturbación, el mayor exponente de Lyapunov σ_1 aparece. Con esto, expresamos la perturbación de la forma

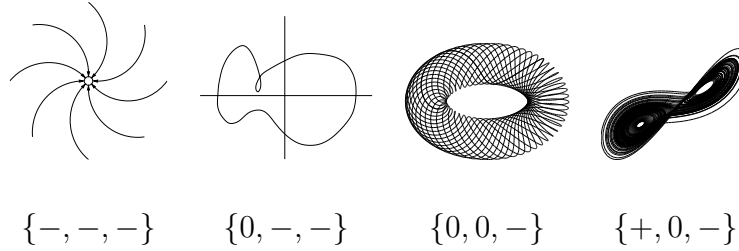
$$\tilde{\mathbf{x}} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_n \mathbf{e}_n$$

y, debido a las ecuaciones (3.26) y (3.27), obtenemos que $\sigma(\tilde{\mathbf{x}}) = \sigma_1$ para $c_1 \neq 0$. Podemos reconocer de la figura que $\sigma_2 < \sigma_1$, por ejemplo, sólo aparecería si $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{L}_2$ y $\sigma_3 < \sigma_2$ sólo si $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{L}_3$. Sin embargo, esto no puede conseguirse nunca con exactitud con cálculo numérico, de las que normalmente se depende para el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Inevitablemente, errores numéricos generarán una componente en la dirección de \mathbf{e}_1 que se amplificará exponencialmente.

Ahora la cuestión es como determinar los otros exponentes de Lyapunov $\sigma_i < \sigma_1$ ($i = 2, 3, \dots, n$). En este punto introducimos el concepto de los *exponentes de Lyapunov de orden p-ésimo*. La cantidad σ definida en la ecuación (3.24) se denomina con el nombre de exponente de Lyapunov de primer orden. En este contexto, observamos la expansión o contracción media en una dirección, i.e., a lo largo de un vector. Ahora, en el caso del concepto generalizado de exponentes de Lyapunov de orden p-ésimo estudiamos la razón de crecimiento medio exponencial del volumen V_p de un paralelepípedo p-dimensional en el espacio tangente \mathbb{E}_0 y definimos

$$\sigma_{\mathbf{x}_r}^{(p)}(V_p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{V_p(t)}{V_p(0)}$$

Asumimos de nuevo que el límite existe, es finito y que toma el mismo valor para casi todas las trayectorias pertenecientes a la cuenca de atracción de un atractor, de tal forma que podemos prescindir del subíndice



Cuadro 3.2: Clasificación de atractores en el espacio de fase tridimensional por medio de los exponentes de Lyapunov

\mathbf{x}_r . Si consideramos un paralelepípedo definido por la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$, entonces

$$\sigma^{(p)}(V_p) = \sigma(\mathbf{e}_1) + \sigma(\mathbf{e}_2) + \dots + \sigma(\mathbf{e}_p) \quad (3.28)$$

es decir, el exponente de Lyapunov de orden p -ésimo es igual a la suma de los correspondientes valores de σ de primer orden. Esta relación forma la base para el cálculo de los exponentes de Lyapunov de orden p -ésimo. Dependiendo de la elección de los p vectores de la base, existen $p < n$ posibilidades alternativas para construir los paralelepípedos p -dimensionales. Por ejemplo, para $p = 2$ y $n = 3$ existen tres posibilidades (ver figura), concretamente las tres caras laterales del paralelepípedo. Así pues

$$\sigma^{(2)}V_2 = \text{uno de los valores del conjunto } \{\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_2 + \sigma_3, \sigma_3 + \sigma_1\}$$

Una vez más, observamos que en el transcurso de un cálculo mediante métodos numéricos, el valor más grande posible aparece tal que $\sigma^{(p)}(V_p)$ parece depender sólo de la dimensión p , y no del paralelepípedo elegido arbitrariamente. Podemos expresar entonces (3.28) de forma más precisa como

$$\sigma^{(p)} = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p$$

De aquí se desprende que si conocemos los exponentes de Lyapunov de orden p para $p = 1, \dots, n$, podemos determinar todos los exponentes de Lyapunov de primer orden sucesivamente a partir del siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\sigma^{(1)} &= \sigma_1 \\
\sigma^{(2)} &= \sigma_1 + \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = \sigma^{(2)} - \sigma^{(1)} \\
&\vdots \\
\sigma^{(n)} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \sigma^{(n)} - \sigma^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Podemos ahora extraer algunas conclusiones importantes de las características de los exponentes de Lyapunov:

- i. Se puede demostrar que para todas las trayectorias que no terminen en un punto fijo, al menos un exponente de Lyapunov es cero. Para probar esto, observamos la perturbación a lo largo de la tangente a la trayectoria $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$.
- ii. Los exponentes de Lyapunov nos ayudan a distinguir entre los distintos tipos de atractores. La figura 3.2 presenta los tipos posibles de atractores para un espacio de fase tridimensional así como los correspondientes exponentes de Lyapunov $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Un punto fijo posee tres exponentes de Lyapunov negativos; un ciclo límite está caracterizado por $\sigma_1 = 0, \sigma_3 < \sigma_2 < 0$, mientras que para un toro se obtienen $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 < 0$. Un movimiento caótico en un atractor extraño se caracteriza por un exponente de Lyapunov positivo $\sigma_1 > 0$ así como por $\sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 < 0$.

Un exponente de Lyapunov positivo $\sigma_1 > 0$ caracteriza la divergencia exponencial de las trayectorias. Puesto que un atractor extraño sólo ocupa una parte restringida del espacio de fase, sin embargo, el crecimiento exponencial no es posible en todas direcciones; las contracciones deben ocurrir por necesidad. Este comportamiento es reflejado por un exponente de Lyapunov negativo $\sigma_3 < 0$. Puesto que las trayectorias que estaban originalmente próximas divergen exponencialmente, un sistema caótico se muestra muy sensible a pequeñas desviaciones en las condiciones iniciales.