

## Capítulo 2

# Resolución de la ecuación diferencial

Una vez que se ha obtenido cuál es la ecuación que define el sistema pasamos a su resolución. Las ecuaciones que modelan el comportamiento de este circuito son, como se vio en el capítulo anterior, las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(\omega t) \quad (2.1)$$

$$f(x) = \begin{cases} bx + (a - b)x_0, & \text{si } x > x_0, \\ ax, & \text{si } |x| \leq x_0 \\ bx - (a - b)x_0, & \text{si } x < -x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.1. Estudio de la dinámica unizonal

Teniendo en cuenta que  $f(x)$  es una función lineal a trozos con tres zonas diferenciadas se podría pensar en resolver la ecuación (2.1) para el caso en el que la solución se encuentra en una zona. Comenzamos a estudiar en primer lugar este caso, primero por su mayor simplicidad, y también porque con posterioridad se presentarán resultados que permitirán aproximarse al problema de tres zonas de forma más sencilla. La ecuación que define a este sistema bizonal es:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

$$f(x) = \begin{cases} bx - a, & \text{si } x > 0 \\ -bx - a, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

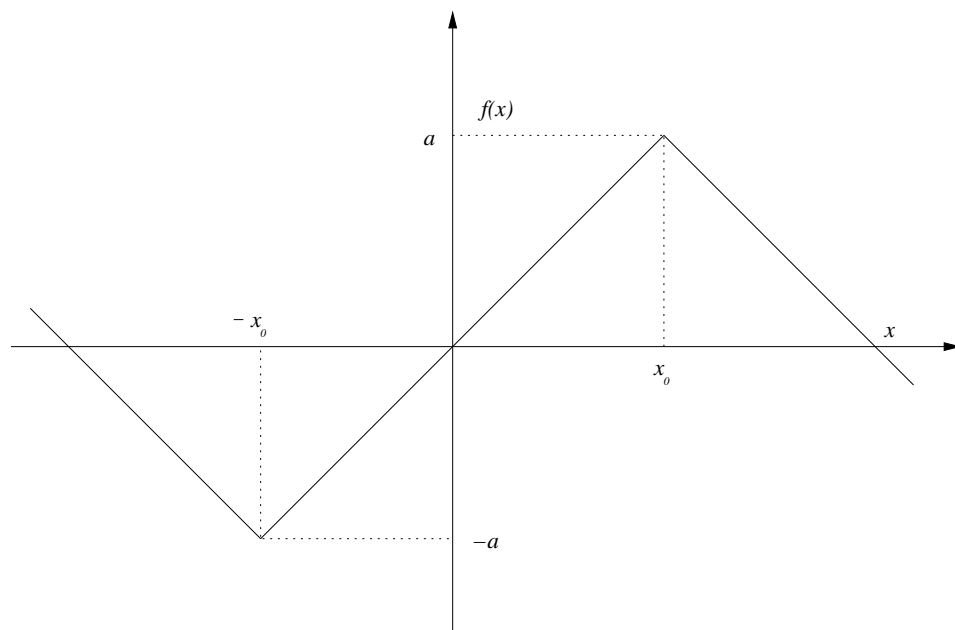


Figura 2.1: Característica  $f(x)$  trizonal

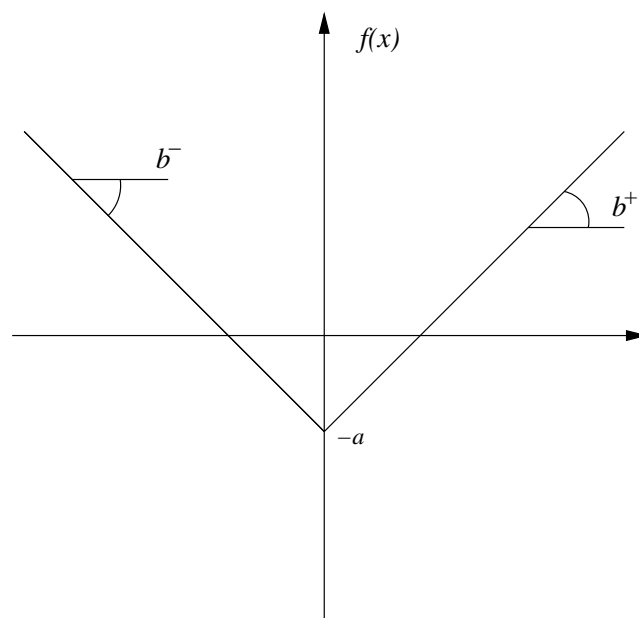


Figura 2.2: Característica  $f(x)$  bizonal

Si se sustituye  $f(x)$  por la ecuación de la característica bizonal, podremos expresar la ecuación (2.3) de forma que nos permita su resolución. Para este caso consideraremos que  $b > 0$ . Por simplicidad, al sustituir (2.4) en (2.3) llamaremos  $b^-$  a la pendiente de  $f(x)$  para  $x < 0$  y  $b^+$  a la correspondiente a  $x > 0$ . Así una vez hechas las sustituciones se puede escribir:

$$\frac{dx}{dt} = b^\pm x - a + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

### 2.1.1. Escalado de las ecuaciones

Pasamos a continuación al escalado de la ecuación para comprobar si es posible la reducción de parámetros en el sistema. Para ello realizamos el cambio de variable  $x = \alpha y$  en (2.5), tras lo cual resulta que:

$$\alpha \frac{dy}{dt} = \alpha b^\pm y - a + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

y dividiendo ambos miembros de la ecuación por  $\alpha$  obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = b^\pm y - \frac{a}{\alpha} + \frac{R}{\alpha} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{r}{\alpha} \cos(\omega t) \quad (2.7)$$

Si ahora tomamos  $\tau = \omega t$  y aplicamos la regla de la cadena, que nos dice:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \omega,$$

concluimos que:

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{b^\pm}{\omega} y - \frac{a}{\alpha\omega} + \frac{R}{\alpha\omega} \cos\left(\frac{\Omega}{\omega}\tau + \varphi_0\right) + \frac{r}{\alpha\omega} \cos(\tau) \quad (2.8)$$

Eligiendo  $\alpha = \frac{a}{\omega}$  conseguimos simplificar esta ecuación reduciendo su número de parámetros en uno. Como consecuencia de haber elegido el cambio de variable  $\tau = \omega t$  también reducimos un parámetro más, que era la frecuencia del segundo forzamiento. De ahora en adelante tendremos como otro parámetro del sistema la relación de frecuencias  $\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega}$ , al cual nos referiremos a menudo a lo largo del proyecto. Pasamos pues a realizar estos cambios que nos permiten simplificar (2.8).

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{b^\pm}{\omega} y - 1 + \frac{R}{a} \cos(\tilde{\Omega}\tau + \varphi_0) + \frac{r}{a} \cos(\tau) \quad (2.9)$$

Reescribimos la ecuación realizando los siguientes cambios:  $\frac{b^\pm}{\omega} \equiv \tilde{b}^\pm$ ,  $\frac{R}{a} \equiv \tilde{R}$ ,  $\frac{r}{a} \equiv \tilde{r}$ .

$$\frac{dy}{d\tau} = \tilde{b}^{\pm} y - 1 + \tilde{R} \cos(\tilde{\Omega}\tau + \varphi_0) + \tilde{r} \cos(\tau) \quad (2.10)$$

Y si además eliminamos las tildes y renombramos las variables  $y \equiv x$ ,  $\tau \equiv t$  llegamos a una ecuación más legible y que recuerda a la original (2.5). Así la ecuación queda de esta forma:

$$\frac{dx}{dt} = b^{\pm} x - 1 + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(t) \quad (2.11)$$

En esta ecuación los parámetros serán  $b^{\pm}$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $\Omega$  y  $\varphi_0$ , aunque podemos considerar que  $b^{\pm}$  va a ser una constante del sistema y el desfase  $\varphi_0$  en principio no tiene gran importancia, si bien dejaremos el estudio de la influencia de estos parámetros para un capítulo posterior. Así pues, a efectos de estudio del sistema los parámetros que vamos a variar para ver como afectan a su comportamiento serán las amplitudes de los forzamientos y la relación existente entre la frecuencia de sendos forzamientos.

### 2.1.2. Solución de la ecuación en una zona

Una vez se ha normalizado la ecuación diferencial, pasamos a su resolución. Para ello seguiremos el método mediante el cuál obtenemos la solución de la homogénea y una solución particular para la completa. Obtenemos la ecuación homogénea si anulamos los forzamientos.

$$\dot{x}_h = b^{\pm} x \quad (2.12)$$

La solución de esta ecuación es inmediata y se trata de una función exponencial.

$$x_h = K^{\pm} e^{b^{\pm} t} \quad (2.13)$$

Para obtener la solución particular de la completa usamos el principio de superposición. Se puede ver la ecuación que estamos intentando resolver como:

$$\frac{dx}{dt} = b^{\pm} x + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t),$$

donde  $f_1(t) = -1$ ,  $f_2(t) = R \cos(\Omega t + \varphi_0)$  y  $f_3(t) = r \cos t$ . Para obtener la solución particular de la ecuación completa podemos resolver por separado:  $\frac{dx}{dt} = b^{\pm} x + f_1(t)$ ,  $\frac{dx}{dt} = b^{\pm} x + f_2(t)$  y  $\frac{dx}{dt} = b^{\pm} x + f_3(t)$ .

Pasamos a obtener una solución particular de la completa,  $x_{p1}(t)$  para la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = b^{\pm}x - 1 \quad (2.14)$$

Como  $f_1(x) = -1$  es una constante entonces la solución para la ecuación (2.14) es también una constante. En efecto, si probamos con la solución  $x_{p1} = C$  tenemos:

$$\frac{dx_{p1}}{dt} = b^{\pm}x_{p1} - 1 = 0; \quad x_{p1}(t) = C = \frac{1}{b^{\pm}} \quad (2.15)$$

En el caso de  $f_2(x) = R \cos(\Omega t + \varphi_0)$  ensayaremos una solución particular de la completa del tipo  $A \sin(\Omega t + \varphi_0) + B \cos(\Omega t + \varphi_0)$ . Para determinar las constantes sustituiremos esta solución en la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = b^{\pm}x + R \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (2.16)$$

Sustituyendo este tipo de solución concluimos que la solución buscada es:

$$x_{p2}(t) = \frac{R}{b^{\pm 2} + \Omega^2} [\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) - b^{\pm} \cos(\Omega t + \varphi_0)] \quad (2.17)$$

Usando ahora que

$$\sin \alpha - r \cos \alpha = \sqrt{1 + r^2} \sin(\alpha - \theta), \quad (2.18)$$

donde  $\theta = \arctan r$ , vemos que la solución obtenida en se puede expresar también como:

$$x_{p2}(t) = \frac{R\Omega}{b^{\pm 2} + \Omega^2} \sqrt{1 + \frac{b^{\pm 2}}{\Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi_0 - \theta) \quad (2.19)$$

con  $\theta = \arctan(\frac{b}{\Omega})$ .

De manera análoga podemos encontrar la solución para la solución particular de la tercera ecuación, la cual, identificando términos con (2.19) es:

$$x_{p3}(t) = \frac{r}{b^{\pm 2} + 1} [\sin t - b^{\pm} \cos t] = \frac{r}{b^{\pm 2} + 1} \sqrt{1 + b^{\pm 2}} \sin(t - \vartheta) \quad (2.20)$$

con  $\vartheta = \arctan(b)$ .

De esta forma estamos en condiciones de calcular la solución de la ecuación diferencial correspondiente al caso bizonal. Sólo nos queda por determinar una constante. Para ello sustituimos la solución de la homogénea más la suma de las soluciones particulares de la completa.

$$\begin{aligned}
x = & K^{\pm} e^{b^{\pm} t} + \frac{1}{b^{\pm}} \\
& + \frac{R}{b^{\pm 2} + \Omega^2} [\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) - b^{\pm} \cos(\Omega t + \varphi_0)] \\
& + \frac{r}{b^{\pm 2} + 1} [\sin t - b^{\pm} \cos t]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Se puede calcular el valor de la constante  $K$  si evaluamos la expresión en  $t = 0$  y dejamos todo en función de  $x(0)$ .

$$K^{\pm} = x(0) + \frac{1}{b^{\pm}} + \frac{R}{b^{\pm 2} + \Omega^2} [\Omega \sin \varphi_0 - b^{\pm} \cos \varphi_0] - \frac{r}{b^{\pm 2} + 1} \tag{2.22}$$

## 2.2. Estudio del caso simétrico de tres zonas

Una vez resuelta la ecuación para cada una de las dos zonas correspondiente al caso bizonal, pasamos a ver cómo calcular la solución, en cada uno de los tramos de  $f(x)$  para el caso trizonal simétrico. Para ello aprovecharemos los resultados obtenidos anteriormente con el fin de ahorrar cálculo. Para esta parte se supondrá que el sistema está caracterizado por una curva con tres zonas diferenciadas: una central con pendiente positiva y otras dos exteriores con pendientes negativas e iguales entre sí.

### 2.2.1. Escalado de la ecuación

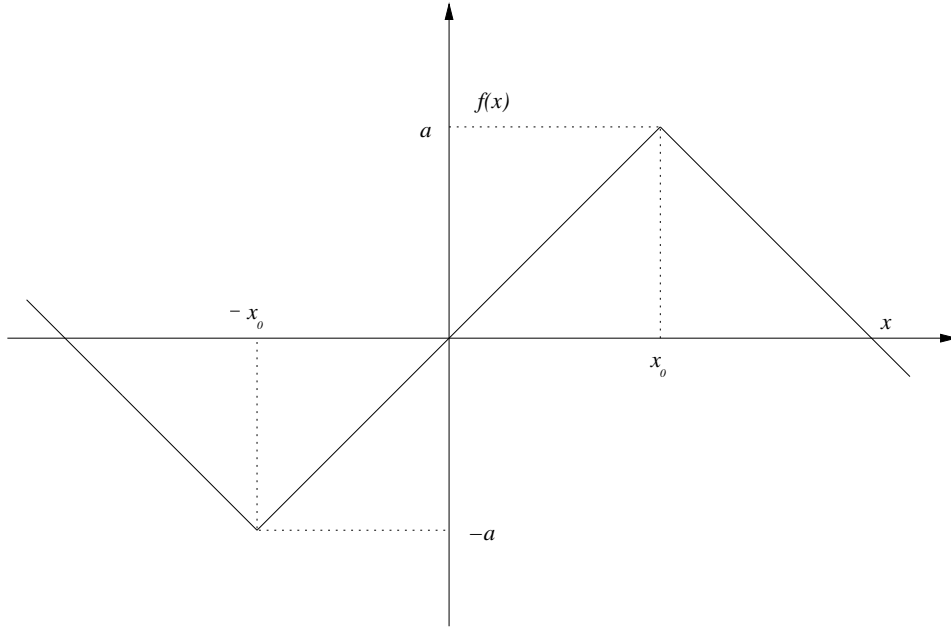
Realizando los mismos cambios de variable que se usaron para el caso simétrico de dos zonas:

$$x = \alpha y \quad \tau = \omega t,$$

y aplicando la regla de la cadena, para realizar un escalado en el tiempo, se llega a la siguiente ecuación.

$$\frac{dy}{d\tau} = f(y) + \frac{R}{\alpha\omega} \cos\left(\frac{\Omega}{\omega}\tau + \varphi_0\right) + \frac{r}{\alpha\omega} \cos(\tau) \tag{2.23}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{b}{\omega}y + \frac{a-b}{\alpha\omega}x_0, & \text{si } x > x_0, \\ \frac{a}{\omega}y, & \text{si } |x| \leq x_0 \\ \frac{b}{\omega}y - \frac{a-b}{\alpha\omega}x_0, & \text{si } x < -x_0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Figura 2.3: Característica  $f(x)$  trizonal

Siguiendo los mismos criterios tomados para el escalado de (2.8) las ecuaciones (2.23) y (2.24), si elegimos  $\alpha = 1$  pueden ser reescritas como:

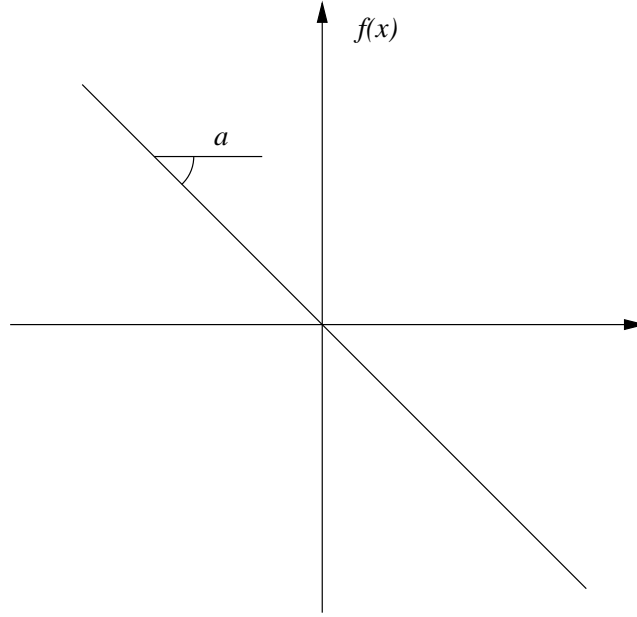
$$\frac{dx}{dt} = f(x) + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(t) \quad (2.25)$$

$$f(x) = \begin{cases} bx + (a - b)x_0, & \text{si } x > x_0, \\ ax, & \text{si } |x| \leq x_0 \\ bx - (a - b)x_0, & \text{si } x < -x_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Pasamos a resolver la ecuación de la zona central por ser la más fácil. De todas formas para encontrar la solución en los otros tramos de la curva  $f(x)$  no será necesario realizar cálculos ya que aprovecharemos los resultados obtenidos durante la resolución del caso simétrico de dos zonas: no habrá más que identificar términos y construir de esta forma la solución para los extremos exteriores de la gráfica. La ecuación para la zona central es pues:

$$\frac{dx}{dt} = ax + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

Utilizando el mismo método que para el caso anterior llegamos a una

Figura 2.4: Característica  $f(x)$  con una sola zona

solución suma de la solución de la homogénea y una particular de la completa. Siguiendo pasos análogos se concluye que la solución es:

$$\begin{aligned}
 x = & K_2 e^{at} \\
 & + \frac{R}{a^2 + \Omega^2} [\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) - a \cos(\Omega t + \varphi_0)] \\
 & + \frac{r}{a^2 + 1} [\sin t - a \cos t]
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$K_2 = x(0) + \frac{R}{a^2 + \Omega^2} [\Omega \sin \varphi_0 - a \cos \varphi_0] - \frac{r}{a^2 + 1} \tag{2.29}$$

Asimismo podemos obtener de forma similar la solución para las zonas exteriores de  $f(x)$ . En este caso la ecuación que tendremos que resolver será:

$$\frac{dx}{dt} = bx \pm (a - b)x_0 + R \cos(\Omega t + \varphi_0) + r \cos(\omega t) \tag{2.30}$$

Observando el resultado obtenido en (2.21) se puede concluir que la solución correspondiente en los tramos izquierdo y derecho de la ecuación



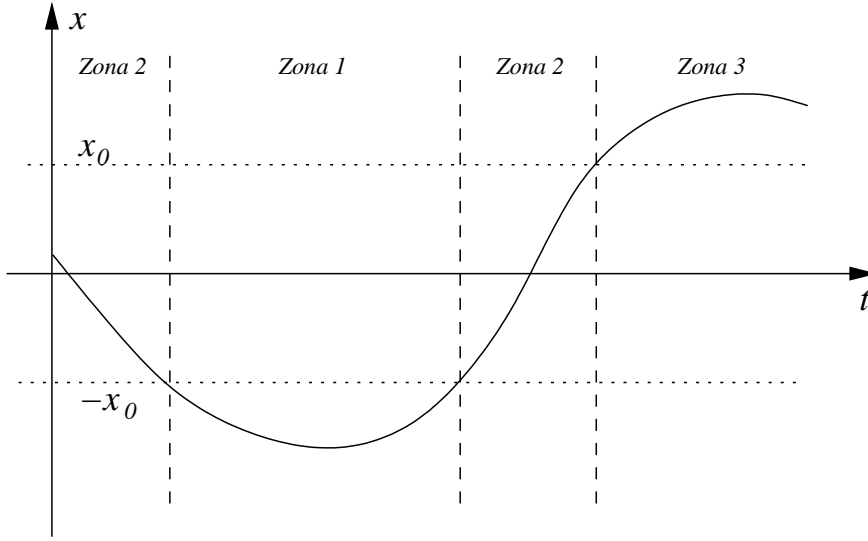


Figura 2.5: Solución en el tiempo

es (en los signos dobles, el signo de arriba corresponde a  $x < -x_0$  y el signo de abajo a  $x > x_0$ ):

$$\begin{aligned}
 x = & K_{1,3} e^{bt} \pm \frac{a-b}{b} x_0 \\
 & + \frac{R}{b^2 + \Omega^2} [\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) - b \cos(\Omega t + \varphi_0)] \\
 & + \frac{r}{b^2 + 1} [\sin t - b \cos t]
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$K_{1,3} = x(0) \mp \frac{a-b}{b} x_0 + \frac{R}{b^2 + \Omega^2} [\Omega \sin \varphi_0 - b \cos \varphi_0] - \frac{r}{b^2 + 1} \tag{2.32}$$

Usando la propiedad trigonométrica expresada en (2.18) y considerando la naturaleza de la solución para cada una de las regiones podemos resumir la solución de la ecuación en el caso de tres zonas de la siguiente forma.

$$x(t) = \begin{cases} K_1 e^{bt} + \frac{a-b}{b} x_0 + \\ \quad + \frac{R\Omega}{b^2 + \Omega^2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{\Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi_0 - \theta) \\ \quad + \frac{r}{b^2 + 1} \sqrt{1 + b^2} \sin(t - \vartheta), & \text{si } x < -x_0 \\ K_2 e^{at} + \\ \quad + \frac{R\Omega}{a^2 + \Omega^2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{\Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi_0 - \theta) \\ \quad + \frac{r}{a^2 + 1} \sqrt{1 + a^2} \sin(t - \vartheta), & \text{si } |x| < x_0 \\ K_3 e^{bt} - \frac{a-b}{b} x_0 + \\ \quad + \frac{R\Omega}{b^2 + \Omega^2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{\Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi_0 - \theta) \\ \quad + \frac{r}{b^2 + 1} \sqrt{1 + b^2} \sin(t - \vartheta), & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Para obtener la solución a lo largo del tiempo lo que se tendría que hacer es comenzar con una de las tres ecuaciones según en qué zona nos encontremos. Entonces tendríamos que ver en que instante  $t = t_i$  la solución cambia de zona y entonces usar el valor de  $x(t = t_i)$  para determinar el valor de la constante  $K_i$  correspondiente a la zona en cuestión, volviendo a repetir el proceso hasta que se produzca un nuevo cambio de zona. Obtener la solución del sistema de esta manera es una tarea imposible, por lo que para el análisis de las ecuaciones, y por tanto del comportamiento del circuito, se va a utilizar un programa que permite hallar la solución mediante métodos numéricos.