Probabilidad y Estadística

Solución de la tarea 6

Problema 1.- (10 puntos) Simula 1000 veces una variable aleatoria X con distribución bernoulli$\left(p = \frac{1}{4}\right)$y haz un histograma de la función de densidad empírica. Encuntra el promedio de las simulaciones
¿Esto es coherente con $E\left(X\right) = p$?

Solución 1.- Hoja de Excel.

Problema 2.- (10 puntos) Simula 1000 veces una variable aleatoria X binomial$\left(n = 3, p = \frac{1}{4}\right)$y haz un histograma de la función de densidad empírica. Encuentra el promedio de las 1000 simulaciones. ¿Esto es congruente con que $E[X] = np$?

Solución 2.- Hoja de Excel.

Problema 3.- (5 puntos) En una misma gráfica, grafíca la función de densidad Poisson(15) y la función de densidad Binomial $\left(30, \frac{1}{2}\right)$
En una misma gráfica, grafíca la función de densidad Poisson$\left(\frac{70}{8}\right)$ y la función de densidad Binomial $\left(10, \frac{7}{8}\right)$
En una misma gráfica, grafíca la función de densidad Poisson$\left(\frac{10}{8}\right)$ y la función de densidad Binomial $\left(10, \frac{1}{8}\right)$
En una misma gráfica, grafíca la función de densidad Poisson(5) y la función de densidad Binomial $\left(100, \frac{1}{20}\right)$
¿CONCLUSIONES?
(se debe entregar el disco con las gráficas)

Solución 3.- Hoja de Excel.

Problema 4.- Utiliza la aproximación de Poisson para calcular la probabilidad de que en una caja de 100 cerillos se encuentren a lo más 2 cerillos defectuosos si 3 % de los cerillos que se producen son defectuosos.

Solución 4.- Sea X el número de cerillos defectuosos en la caja. La probabilidad de que un cerillo sea defectuoso es 0.03. entonces X tiene distribución binimial$(100, 0.03)$. Sabemos que la Poisson$(\lambda = np)$ aproxima a la binomial (np) .Por lo tanto se debe utilizar Poisson$(100 \times 0.03 = 3)$. Lo que se nos pide es $P\left(X \leq 2\right) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 0{,}423\,19$

Problema 5.- Un libro de 500 páginas contiene 500 errores de imprenta. Estime la probabilidad de que una página, seleccionada al azar, contenga 3 o más errores.

Solución 5.- En una página, en promedio hay 1 error, Sea $X =$ Número de errores en una página. No tenemos el número de letras que hay en una página ni la probabilidad de que en cada letra exista algun error, no obstante tenemos el promedio de errores en una página.por lo que se utilizará la poisson con parámetro $\lambda = 1$. Lo que nos piden es

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 3\right) &= 1 - P\left(X < 3\right) \\ &= 1 - \left(P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1^0 e^{-1}}{0!} - \frac{1e^{-1}}{1!} - \frac{1^2 e^{-1}}{2!} \\ &= 8.\,030\,1 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Problema 6.- Sea X una variable aleatoria con distribución poisson(λ), Demuestra que la probabilidad de que X tome un valor par es

$$\frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$$

Solución 6.-

$$\begin{aligned} P\left(X \text{ tome un valor par}\right) &= P\left(X = 0\right) + P\left(X = 2\right) + P\left(X = 4\right) + P\left(X = 6\right) + \ldots + \\ &= \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \frac{\lambda^4 e^{-\lambda}}{4!} + \frac{\lambda^6 e^{-\lambda}}{6!} + \ldots + \\ &= e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^6}{6!} + \ldots +\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

recordemos que:

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda} &= 1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\frac{\lambda^5}{5!}+...+..\\
e^{-\lambda} &= 1-\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}-\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^4}{4!}-\frac{\lambda^5}{5!}+...+
\end{aligned}
$$

sumando:

$$e^{\lambda}+e^{-\lambda}=2\left(1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\frac{\lambda^6}{6!}+...+\right)$$

sustituyendo en 1, obtenemos:

$$P\left(X \text{ tome un valor par}\right)=\frac{e^{-\lambda}}{2}\left(e^{\lambda}+e^{-\lambda}\right)=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda}\right)$$

Problema 7.- En promedio se reciben dos peticiones de acceso a una página web durante un minuto cualquiera. Utiliza el modelo poisson para calcular la probabilidad de que en un minuto cualquiera:
(a) nadie solicite acceso a la página
(b) Se reciban mas de dos peticiones

Solución 7.- Sea X el número de peticiones de acceso a una página web en un minuto. En promedio hay 2 peticiones en un minuto por lo tanto X tiene distribución poisson(2).
(a) Nos piden $P\left(X=0\right)=\frac{2^0e^{-2}}{0!}=0{,}135\,34$
(b) Nos piden

$$
\begin{aligned}
P\left(X>2\right) &= 1-P\left(X\leq 2\right)\\
&= 1-\left(P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)\right)\\
&= 1-\frac{2^0e^{-2}}{0!}-\frac{2e^{-2}}{1!}-\frac{2^2e^{-2}}{2!}\\
&= 0{,}323\,32
\end{aligned}
$$

Problema 8.- El número de computadoras que fallan por mes en un laboratorio de computo tien una distribución poisson con un promedio de 2 máquinas descompuestas. El laboratorio tiene la capacidad de reparar hasta dos máquinas por mes. Cuando se descomponen mas de dos máquinas, las restantes se envían fuera del laboratorio para su reparación
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un mes cualquiera sea necesario enviar máquinas fuera del laboratorio para su reparación?
(b) ¿Cuál es el número de computadoras con falla más probable en un mes?

Solución 8.- **(a)** Sea X el número de computadoras que fallan en un mes. Cómo el promedio es 2, tenemos que X tiene distribución poisson$(\lambda=2)$. Lo que nos piden es

$$
\begin{aligned}
P\left(X>2\right) &= 1-P\left(X\leq 2\right)\\
&= 1-\left(P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)\right)\\
&= 1-\frac{2^0e^{-2}}{0!}-\frac{2e^{-2}}{1!}-\frac{2^2e^{-2}}{2!}\\
&= 0{,}323\,32
\end{aligned}
$$

(b) Ver hoja de excel

Problema 9.- Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p.Encuentra $P(X>n)$ para $n\in\mathbb{N}$. Proporciona una interpretación de este resultado.

Solución 9.-

$$
\begin{aligned}
P\left(X>n\right) &= 1-P\left(X\leq n\right)\\
&= 1-\left(P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+...+P\left(X=n\right)\right)\\
&= 1-p-p\left(1-p\right)-p\left(1-p\right)^2-...-p\left(1-p\right)^n\\
&= 1-p\left(1+\left(1-p\right)+\left(1-p\right)^2+...+\left(1-p\right)^n\right)\\
&= 1-p\left(\frac{1-\left(1-p\right)^{n+1}}{1-\left(1-p\right)}\right)\\
&= \left(1-p\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

utilizando la igualdad : $1+r+r^2+...+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ con $r=(1-p)$
Recordemos que X es el número de fracasos antes del primer éxito, si $X>n$ esto significa que el número de fracasos antes del primer éxito es mayor que n y eso sucede solamente si hay $n+1$ fracasos seguidos y la probabilidad es $\left(1-p\right)^{n+1}$

Problema 10.- Sea Y una variable aleatoria tal que $Y \sim$unif$(0,1)$.
Sea $Z = \left\lceil \frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)} \right\rceil$ (donde $\lceil a \rceil$ = mayor entero menor o igual a a) y con $p \in (0,1)$. Se sabe que Z tiene una distribución geométrica de parámetro p. (No es necesario demostrar este resultado).
(a) (10 puntos) Utilizando el resultado anterior, realiza 1000 simulaciones de una variable aleatoria geométrica $p = \frac{1}{4}$ y reliza un histograma de la función de densidad empírica. Encuentra el promedio de las 1000 simulaciones ¿esto es consistente con que $E[X] = \frac{1-p}{p}$.?
(b) (10 puntos) Utilizando el resultado inicial, realiza 1000 simulaciones de una variable aleatoria binomial negativa, haz el histograma de la función de densidad empírica. Encunetra el promedio de las 1000 simulaciones. ¿esto es consistente con que $E[X] = r\frac{(1-p)}{p}$?

Problema 11.- Eulalio y Petra, una pareja de mexicanos muy conservadora, desean tener un hijo varón para que el apellido de la familia se conserve. La pareja ha acordado seguir procreando hijos hasta tener un niño. Medicamente se sabe que es el padre el que determina el sexo del bebé, analizando la familia de Eulalio, se ha determinado que cada vez que Petra se embaraza, hay una probabilidad de $\frac{1}{4}$ que sea niño.
(a)¿Cuál es el número esperado de hijos que va a tener esta pareja?
(b) Petra ya ha tenido tres niñas, por lo que Eulalio piensa que el siguiente será niño ¿Tiene razón?

Solución 10.- (a) Sea X el número de hijas antes de tener una niño, entonces X tiene distribución geométrica $\left(\frac{1}{4}\right)$
$E[X] = \frac{1-p}{p} = 3$, entonces el número esperado de hijas antes de tener un niño es 3, por lo tanto el número esperado de hijos (hombres y mujeres) son 4
(b) No, no tiene razón. cada vez que la mujer se embaraza hay una probabilidad de $\frac{1}{4}$ que sea niño.