

Tarea 3

Justifica detalladamente tu respuesta

Fecha de entrega: Viernes 31 Octubre



— 1.- **Respuesta Aleatorizada** La técnica de la **Respuesta aleatorizada** es muy útil cuando las personas que son entrevistadas, se niegan a contestar o dan una respuesta falseada a preguntas sensitivas, que las ponen en aprietos o les pueden ser dañinas en algún sentido.

- (a) En una universidad se desea estimar la proporción de estudiantes que han usado cocaína:

**Método:** en una caja se colocaron y revolvieron 30 bolas rojas, 16 azules y 4 blancas; se pidió a cada estudiante que extrajera una bola de la caja, si la bola extraída era roja se contestaba la pregunta 1 y en caso contrario la pregunta 2.

Pregunta 1: ¿Alguna vez has usado droga?

Pregunta 2: ¿Es blanca la bola que extrajiste?

Se entrevistaron a 900 estudiantes de licenciatura y utilizando el método descrito se obtuvieron 123 respuestas afirmativas, estima la proporción de estudiantes que han usado droga

- (b) El método general de la respuesta aleatorizada es el siguiente:

Se tiene una pregunta **Q** sensitiva .Se tiene una urna con bolas rojas, azules y blancas.

Sea

$p_1$  la proporción de bolas rojas

$p_2$  la proporción de bolas azules

$p_3$  la proporción de bolas blancas

Nota que  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Se tienen  $N$  personas, a cada una de ellas se le pide que extraiga una bola de la urna, si la bola es roja, se le pide que conteste la pregunta **Q**, en caso contrario debe contestar la pregunta ¿La bola que extrajiste es blanca?

Sea  $S$  el número de respuestas afirmativas obtenidas en el proceso. Estima la proporción de personas que contestaron afirmativamente a la pregunta **Q**.

- (c) (5 puntos) Se desea ver que tan preciso es el método anterior, para ello recurriremos a una técnica de uso

común: **Simulación:**

Se tiene una población de 900 individuos, de los cuales 150 han probado droga alguna vez en su vida.

Con ayuda de un programa o paquete (Maple, C++, Excel,...) simula el método de la encuesta aleatorizada:

- 1) 1000 simulaciones con  $p_1 = 0,5$   $p_2 = 0,25$   $p_3 = 0,25$
- 2) 1000 simulaciones con  $p_1 = \frac{3}{5}$   $p_2 = \frac{16}{50}$   $p_3 = \frac{4}{50}$

En cada simulación, encuentra la proporción **estimada** de personas que han probado droga

¿Qué es mejor 1) o 2) ? (Debes justificar tu respuesta)

Se deberá entregar el programa en disco. indicando el programa utilizado

— 2.- Una urna contiene 9 bolas blancas y 4 bolas rojas, una segunda urna contiene 7 bolas blancas y 2 bolas rojas y una tercera urna contiene 9 bolas blancas y 10 bolas rojas. Se elige 1 bola al azar de la primera urna y se transfiere a la segunda; después de esto, se selecciona al azar 1 bola de la segunda urna y se transfiere a la tercera; finalmente se selecciona al azar una bola de la tercera urna. Calcule la probabilidad de que la bola que se obtiene finalmente sea roja

— 3.- Se tienen 2 cochecitos de juguete, uno rojo y uno azul, cada vez que se lanza un dado, el coche rojo avanza si sale el 1 y el 2 mientras que el coche azul avanza si sale el 3,4,5, y 6.

(a) Si la meta está a un paso, ¿Cuál es la probabilidad de que el coche azul gane?

(b) Si la meta está a 3 pasos ¿Cuál es la probabilidad de que el coche azul gane?

(c) Si la meta está a 5 pasos ¿Cuál es la probabilidad de que el coche azul gane?

**Ayuda:** Puedes consultar la liga *Carrera de coches* en la sección de simulaciones.

— 4.- Alejandro tiene  $N$  llaves en su bolsillo, y únicamente dos abre la puerta de su casa

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que saque la llave correcta en el  $r$ -ésimo intento si empieza a sacar cada llave **con** reemplazo?  
 $r \in \mathbb{N}$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que saque la llave correcta en el  $r$ -ésimo intento si empieza a sacar cada llave **sin** reemplazo?  
 $r \leq N$

= 5.- .hay tres urnas, una tiene 2 bolas rojas, otra tiene 2 bolas verdes y la última tiene una bola roja y una bola verde. Se escoge aleatoriamente una urna y se escoge una bola al azar, Si la bola extraída es una bola verde, se saca otra bola de la misma urna

(a)¿Cuál es la probabilidad de obtener otra bola verde?

(b) En la sección de simulaciones consulta la liga *Juego de las bolas de 2 colores*, simula varias veces el juego y verifica que tu resultado coincida con la simulación (se deberá entregar una simulación por cada miembro del equipo)

= 6.- Cada vez que un cliente compra un tubo de pasta de dientes, elige la marca  $A$  o la marca  $B$ . Supóngase que en cada compra después de la primera, la probabilidad de que elija la misma marca que escogió en la compra anterior es  $\frac{1}{3}$  y que la probabilidad de que cambie de marca es  $\frac{2}{3}$ . Por ejemplo, si primero compró la marca  $A$  y después la marca  $B$ , comprará la marca  $B$  con probabilidad  $\frac{1}{3}$  y con probabilidad  $\frac{2}{3}$  la marca  $A$ .

Si es igualmente probable que en su primera compra elija la marca  $A$  o la marca  $B$ , ¿Cuál es la probabilidad de que la primera y segunda compras sean de la marca  $A$  y la tercera y cuarta, de la marca  $B$ ?

= 7.- Probar la veracidad o falsedad en cada caso:

(a) Si  $A$  y  $B$  son ajenos entonces son independientes.

(b)  $P(A^c|B) + P(A|B) = 1$

(c)  $P(A^c|B^c) + P(A^c|B) = 1$

(d) Si  $A$  y  $B$  son independientes entonces  $A^c$  y  $B^c$  también

(e) Si  $P(A|B) \geq P(A)$  y  $P(B|C) \geq P(B)$  entonces  $P(A|C) \geq P(A)$

= 8.- Una moneda desbalanceada está hecha de tal forma que la probabilidad de obtener cara es el doble de la probabilidad de obtener cruz. Un experimento aleatorio consiste en lanzar dicha moneda una vez, si se obtiene cara, se selecciona al azar una bola de una urna que contiene 9 bolas blancas y 3 bolas rojas, mientras que si se obtiene cruz, se selecciona al azar una bola de otra urna que contiene 4 bolas blancas y 8 bolas rojas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga finalmente una bola roja?

= 9.- Un sistema contra incendios está compuesto por dos mecanismos, cada uno de los cuales lo activa automáticamente en caso de un incendio. Se ha determinado, con base en la experiencia, que cuando hay un incendio, el primer mecanismo activa el sistema en 95 % de los casos, mientras que el otro mecanismo, que actúa en forma independiente del primero, lo hace en 85 % de los casos. Si un incendio comienza en un edificio que tiene instalado dicho sistema, (a)¿Cuál es la probabilidad de que el sistema sea activado?

= 10.- El Craps es el juego de casino favorito de muchas personas. Es rápido, emocionante y arriesgado. Al principio parece complicado, pero en realidad es muy simple:

Se lanzan dos dados, si el tirador obtiene 7 ó 11 en el primer tiro gana, si obtiene 2,3 y 12 pierde, si el jugador obtiene 4, 5, 6, 8, 9, ó 10, se lanza otra vez, si sale 7 antes que el número obtenido en el tiro inicial, el jugador pierde, sino el jugador gana. A continuación se muestran varios ejemplos

4,5,6,4	El jugador gana
4,6,7	El jugador pierde
7	El jugador gana
12	El jugador pierde

(a) Encuentra la probabilidad de que el jugador gane

(b) Verifica que tu resultado coincida con la simulación de la página Web

= 11.- Juan Antonio lanzó 10 veces una moneda honesta de manera independiente , las 10 veces salió sol , él sabe que

cuando se hacen varios lanzamientos, la proporción de águilas y la proporción de soles será  $\frac{1}{2}$ , por lo tanto piensa que si lanza una vez mas la moneda, es más probable que salga águila que sol. (a) ¿Tiene razón? (b) Si lanzo 100 veces una moneda honesta de manera independiente y en los 100 lanzamientos obtengo sol , ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila en el siguiente lanzamiento? ¿Esto contradice que después de varios lanzamientos obtendremos una proporción igual de águilas que de soles?

= 12.- Sean  $A, B$  eventos independientes con  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ . ¿Cuál es la probabilidad de  $P(A \cap B^c \cup A^c \cap B)$ ?

= 13.- Consideremos un tetraedro (4 caras). Tiene una cara amarilla, una cara roja, una cara azul y otra cara con los 3 colores anteriores. Se lanza el tetraedro y se observa la cara que cae en el piso. Sea  $\Omega = \{\text{amarillo, rojo, azul, tricolor}\}$ . Sea  $A$  el evento "La cara tiene color amarillo",  $R$  el evento "La cara tiene color rojo",  $Az$  el evento "La cara tiene color azul" ¿Los eventos  $A, R$  y  $Az$  son independientes ? ¿Los eventos  $A, R, Az$  son independientes por pares?



= 14.- Sean  $A$  y  $B$  dos eventos tales que  $P(A) = 0,5$   $P(A \cup B) = 0,6$ , encontrar  $P(B)$  si: (a)  $A \cap B = \emptyset$  (b)  $A$  y  $B$  son eventos independientes (c)  $P(A|B) = 0,4$



¡Buena Suerte!!