Tema de casă 1.
Analiză matematică II

Gheorghe Oprişan

15.03.2003

♠ **1.** a) Să se precizeze care dintre afirmatiile următoare sunt adevărate şi care sunt false:

1. Măsura Lebesgue a unei mulţimi boreliene de pe $\mathbb{R}$ reprezintă “lungimea” sa;
2. Dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci $|f|$ este şi ea integrabilă, dar reciproca nu este adevărată, în general;
3. Dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci ea este integrabilă;
4. Fie $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un spaţiu cu măsură şi $f\colon E \to \mathbb{R}$ măsurabilă Borel. Dacă $(A_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ este un şr descrescător de mulţimi din $\mathcal{E}$ cu intersecţia vidă, atunci:
$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu = 0$$
5. Cu notaţiile de la pct. precedent, fie $A \in \mathcal{E}$ astfel încât $f(x) > 0$, $(\forall)\, x \in A$. Atunci $\displaystyle\int_A f\, d\mu > 0$.

b) Despre numerele reale pozitive p şi q se spune că formează o pereche de exponenţi conjugaţi dacă $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (cu convenţia $1/\infty = 0$).
Fie $0 < p < \infty$, q conjugatul lui p iar $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un spaţiu cu măsură.Să se demonstreze că, pentru orice $f, g\colon E \to [0, \infty)$, măsurabile Borel, are loc inegalitatea lui *Hölder*

$$\int_X fg\, d\mu \le \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

(!) Notaţi $A = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$*.Cazurile* A *sau* $B = 0$*;* $A > 0$ *şi* $B = \infty$*;* $A = \infty$ *şi* $B > 0$ *rezultă imediat. Aşadar se poate considera* $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$*.Dacă punem* $F = \dfrac{f}{A}$, $G = \dfrac{g}{B}$*, atunci* $\int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1$*.Pe de altă parte, pentru orice* $x \in X$ *există* $s, t \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$F(x) = e^{s/p}$, $G(x) = e^{t/q}$, *iar din convexitatea funcţiei exponenţiale deducem* $e^{s/p+t/q} \leq \dfrac{1}{p}e^s + \dfrac{1}{q}e^t$, *care conduce la* $F(x)G(x) \leq \dfrac{1}{p}F(x)^p + \dfrac{1}{q}G(x)^q$. *Nu ne mai rămâne decât să integrăm pe* X.

c) Fie $1 \leq < \infty$.Să se demonstreze inegalitatea lui *Minkowski*

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

(!) Se scrie $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$, *se aplică inegalitatea lui Hölder produselor din membrul drept şi se foloseşte convexitatea funcţiei* t^p, $t \in (0, \infty)$.

♠ **2.** Natura integralei $\int_0^1 |\ln x|^\alpha dx$. Discuţie după valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(!) Incercaţi substituţia $x = e^{-t}$.

♠ **3.** Fie $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă. Presupunem că există limitele

$$\alpha = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x); \; \beta = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Să se demonstreze că, pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, are loc formula lui *Froullani*:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (\beta - \alpha) \ln \frac{b}{a}$$

justificând şi convergenţa integralei din membrul stâng.

(!) Fie $0 < t < T$ *şi integrala* $I(t, T) = \displaystyle\int_t^T \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$. *După calcule simple găsim* $I(t, T) = \displaystyle\int_{at}^{bt} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx$. *Se aplică o formulă de medie pentru cele două integrale şi avem*

$$I(t, T) = f(\xi_t) \int_{at}^{bt} \frac{dx}{x} - f(\xi_T) \int_{aT}^{bT} \frac{dx}{x}, \text{ unde } \xi_t \in [at, bt],\ \xi_T \in [aT, bT].$$

Faceţi în final $t \to 0$ *şi* $T \to \infty$.

♠ **4.** Să se stabilească formula lui *Legendre*

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$$

unde $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$

(!) Consideraţi $B(a, a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1} dx = 2\int_o^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$. *Substituţia* $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{t})$ *conduce la relaţia* $B(a, a) = \dfrac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)$. *Pe de altă parte* $B(a, a) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}$, *etc.*

♠ **5.** Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_\Gamma \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$$

de-a lungul drumului următor, parcurs în sens direct:
a) Γ este cercul de centru O şi rază $a > 0$
b) Γ este pătratul cu centrul în O, de latură $2a$, vectorul **a** fiind paralel cu axele de coordonate
c) Γ este translatatul cu $2a\,\imath$ a pătratului de la b)
♠ **6.** Fie $M = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a \leq 1,\ 0 < b \leq 1\right\}$,
$D(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a, 0 < y < b\right\}$ şi

$$f\colon M \to \mathbb{R},\ f(a,b) = \iint_{D(a,b)} |x-y|\, dx\, dy.$$

Să se arate că $f(a,b) = f(b,a)$ şi calculaţi $f(a,b)$.
♠ **7.** Să se calculeze:

$$I = \iint_D \frac{(2+x)y}{x^2+y^2} dx\, dy, \text{ unde}$$
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y^2 - 2x < 0, 0 < r^2 < x^2 + y^2 < R^2\right\}.$$

♠ **8.** Să se calculeze:

1.

$$I = \iiint_V \frac{z^3\, dx\, dy\, dz}{(y+z)(x+y+z)}, \text{ unde}$$
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1\right\}.$$

2.

$$I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2) dx\, dy\, dz, \text{ unde}$$
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 2\right\},\ a, b, c > 0.$$