Capitolul 7

Elemente de teoria matematică a câmpului

In aceast capitol prezentăm câteva noţiuni fundamentale din teoria clasică a câmpului care are multiple aplicaţii în fizică, electrotehnică, etc.

7.1 Câmpuri scalare, câmpuri vectoriale

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă nevidă, fixată.

Definiţia 7.1. Prin *câmp scalar* definit pe U se înţelege orice funcţie $\varphi \colon U \to \mathbb{R}$, iar un *câmp vectorial* de componente P, Q, R în U este o asociere de forma $\vec{v} \colon U \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$, presupunând că este fixat un reper ortogonal în $\mathbb{R}^3$ de versori $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

Câmpurile scalare sunt pur şi simplu funcţii reale de trei variabile reale,iar câmpurile vectoriale sunt funcţii vectoriale (de componente P, Q, R) de trei variabile reale.

Un câmp scalar (respectiv un câmp vectorial) este de clasă $C^p(U)$, $0 \leq p \leq \infty$, dacă funcţia $\varphi \in C^p(U)$ (respectiv $P, Q, R \in C^p(U)$).

Exemplul 7.1. 1. Câmpul scalar al temperaturilor (presiunilor, umidităţilor, etc.) măsurate într-o anumită regiune U a spaţiului.
2. Un exemplu tipic de câmp vectorial îl constituie câmpul vitezelor particulelor (asimilate cu puncte) ale unui fluid într-o conductă.
3. Fie O un punct material fixat; pentru orice $M \neq O$ se consideră vectorul de poziţie $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Dacă punem $r = \|\vec{r}\|$, atunci forţa de atracţie newtoniană de O în M este de forma

$$\vec{v}(M) = -K\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

unde $K > 0$ este o constantă ce depinde de masele celor două puncte. Alegând un reper ortogonal ca în definiţia 7.1, dacă $O(0, 0, 0)$ şi $M(x, y, z)$, avem

$$\vec{v}(x, y, z) = -K\left(\frac{x}{r^3}\vec{\imath} + \frac{y}{r^3}\vec{\jmath} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right).$$

Definiţia 7.2. Fie φ şi $\vec{v}$ două câmpuri, unul scalar şi celălalt vectorial, de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Pentru orice punct $a = (x_0, y_0, z_0) \in U$ se defineşte:

1. *Gradientul câmpului φ în punctul a* este vectorul

$$\operatorname{grad}_a \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a)\vec{\imath} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a)\vec{\jmath} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a)\vec{k}.$$

Asocierea $a \to \operatorname{grad}_a \varphi$, $a \in U$, este un câmp vectorial definit pe U notat $\operatorname{grad} \varphi$ şi numit *câmpul de gradienţi asociat lui φ.*

2. *Divergenţa câmpului $\vec{v}$ în punctul a* este scalarul

$$\operatorname{div}_a \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a).$$

Este definit astfel câmpul scalar

$$\operatorname{div} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

3. *Rotorul câmpului φ în punctul a* este vectorul

$$\operatorname{rot}_a \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial}{\partial y}(a) & \dfrac{\partial}{\partial z}(a) \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

unde determinantul se dezvoltă formal după prima linie. Prin urmare este definit un câmp vectorial, $\operatorname{rot} \vec{v}$, cu componentele

$$w_1 = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad w_2 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad w_3 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Gradientul, divergenţa şi rotorul se mai numesc *operatori diferenţiali de ordinul I.*

Câmpul $\vec{v}$ se zice *solenoidal* sau *irotaţional* în U după cum $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ sau $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ în orice punct din U.

Observaţia 7.1. Aparent, operatorii diferenţiali de de ordinul I depind de alegerea reperului ortogonal; în realitate aceste entităţi sunt intrinseci şi depind numai de câmpul respectiv şi de punctul în care sunt calculate (v. e.g. [7], [21]). O tratare unitară a acestor operatori este realizată în cadrul teoriei formelor diferenţiale (v. e.g. [8], [21]). De asemenea există o posibilitate de unificare a proprietăţilor de calcul pentru câmpuri de clasă C^1 cu ajutorul unui operator simbolic

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{7.1}$$

numit *operatorul nabla.* Se fac convenţiile de a considera $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$ ca produs între câmpul scalar φ "vectorul" ∇; $\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v}$ ca produs scalar între "vectorul" ∇ şi vectorul $\vec{v}$ (de obicei se omite punctul care desemnează produsul scalar); $\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v}$ ca produs vectorial între "vectorul" ∇ şi vectorul $\vec{v}$. Se verifică imediat că în fiecare dintre cele trei ipostaze ∇ este liniar i.e., dacă φ, ψ, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt câmpuri de clasă C^1 într-un deschis $U\in\mathbb{R}^3$, atunci

1. $\nabla(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha(\nabla\varphi)+\beta(\nabla\psi)$, deci $\operatorname{grad}(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha\operatorname{grad}\varphi+\beta\operatorname{grad}\psi$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
2. $\nabla(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha(\nabla\vec{u})+\beta(\nabla\vec{v})$, deci $\operatorname{div}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\operatorname{div}\vec{u}+\beta\operatorname{div}\vec{v}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
3. $\nabla\times(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha(\nabla\times\vec{u})+\beta(\nabla\times\vec{v})$, deci $\operatorname{rot}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\operatorname{rot}\vec{u}+\beta\operatorname{rot}\vec{v}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

care arată că toţi opratorii diferenţiali de ordinul I din definiţia 7.2 sunt liniari. In continuare trecem în revistă alte proprietăţi ale acestor operatori care rezultă direct din proprietăţi ale derivatelor parţiale.

1. Dacă $\varphi\colon U\to\mathbb{R}$ şi $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt de clasă C^1, atunci
$$\operatorname{grad}(h\circ\varphi) = h'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi,\ \text{i.e. } \nabla(h\circ\varphi) = h'(\varphi)\,(\nabla\varphi).$$
2. Gradientul unui câmp scalar constant este nul, i.e. $\operatorname{grad}c = 0$.
3. Divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial constant sunt nule, i.e. $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.
4. Dacă φ şi $\vec{v}$ sunt două câmpuri de clasă C^1 într-un deschis $U\in\mathbb{R}^3$, atunci
$$\operatorname{div}(\varphi\vec{v}) = \varphi\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi,\ \text{i.e. } \nabla(\varphi\vec{v}) = \varphi(\nabla\vec{v})+\vec{v}\cdot(\nabla\varphi) \tag{7.2}$$
$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{v}) = \varphi(\operatorname{rot}\vec{v})-\vec{v}\times\operatorname{grad}\varphi,\ \text{i.e. } \nabla\times(\varphi\vec{v}) = \varphi(\nabla\times\vec{v})-\vec{v}\times(\nabla\varphi) \tag{7.3}$$
Vom demonstra spre exemplificare relaţia (7.3). Considerăm mai întâi cazul particular $\vec{v}(x,y,z) = R(x,y,z)\vec{k}$. In acest caz avem
$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\varphi\vec{v}) &= \operatorname{rot}(\varphi R\vec{k}) = \frac{\partial(\varphi R)}{\partial y}\vec{\imath}-\frac{\partial(\varphi R)}{\partial x}\vec{\jmath}\\ &= \left(R\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial R}{\partial y}\right)\vec{\imath}-\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath}\\ &= R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\imath}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\jmath}\right)+\varphi\left(\frac{\partial R}{\partial y}\vec{\imath}-\frac{\partial R}{\partial x}\vec{\jmath}\right) = \varphi\operatorname{rot}\vec{v}-\vec{v}\times\operatorname{grad}\varphi\end{aligned}$$
Analog se demonstrează că (7.3) se verifică pentru câmpuri particulare de forma $\vec{v} = P\vec{\imath}$ şi $\vec{v} = Q\vec{\jmath}$. Prin adunare şi folosirea linearităţii operatorilor se obţine (7.3) în cazul general.

5. Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt două câmpuri de clasă C^1 într-un deschis $U \in \mathbb{R}^3$, atunci

$$\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\operatorname{rot}\vec{v}, \text{ i.e. } \nabla(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}(\nabla\times\vec{u}) - \vec{u}(\nabla\times\vec{v}) \quad (7.4)$$

6. Dacă φ şi $\vec{v}$ sunt câmpuri de clasă $C^2(U)$, atunci

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \quad (7.5)$$

care este *laplacianul* lui φ. De asemenea

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0; \ \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0; \ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$$

unde laplacianul unui câmp vectorial se calculează pe componente.

Exemplul 7.2. 1. Fie $\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şi $r(x,y,z) = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Avem

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}, \ \operatorname{div}\vec{r} = 3, \ \operatorname{rot}\vec{r} = 0$$

2. $\operatorname{grad} h(r) = h'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$ pentru $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1.
3. $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r}) = 0$, $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r}) = 2\vec{a}$ dacă $\vec{a}$ este un vector constant.
4. Pentru câmpul newtonian $\vec{v} = -K\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ avem

$$\operatorname{div}\vec{v} = -\frac{K}{r^3}\operatorname{div}\vec{r} - \vec{r}\operatorname{grad}\frac{K}{r^3} = -K\operatorname{grad}\frac{1}{r^3} = \frac{3K}{r^5}\vec{r}$$

şi

$$\operatorname{rot}\vec{v} = -\frac{K}{r^3}\operatorname{rot}\vec{r} + \vec{r}\times\operatorname{grad}\left(K\frac{1}{r^3}\right) = K\vec{r}\times\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3K\vec{r}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^5}\right) = 0.$$

Fiind date două câmpuri vectoriale $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ şi $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ într-un deschis $U \in \mathbb{R}^3$ se defineşte

$$(\vec{u}\nabla)\vec{v} = u_1\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + u_2\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + u_3\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$$

care se justifică prin faptul că

$$\vec{u}\cdot\nabla = u_1\frac{\partial}{\partial x} + u_2\frac{\partial}{\partial y} + u_3\frac{\partial}{\partial z}.$$

Se mai pot demonstra următoarele formule utile

$$\operatorname{grad}(\vec{u}\vec{v}) = (\vec{u}\nabla)\vec{v} + \vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{u} + \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u} \quad (7.6)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\operatorname{div}\vec{v} - (\vec{u}\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{u} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u} \quad (7.7)$$

7.2 Drumuri şi curbe

Definiţia 7.3. Fie $I \subset \mathbb{R}^d$ un interval. Se numeşte *drum parametrizat* în $\mathbb{R}^d$ definit pe I orice aplicaţie continuă $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^d$. Dacă $\gamma \in C^p(I)$, atunci drumul se numeşte de clasă C^p. *Traiectoria (urma)* drumului este $(\gamma) = \operatorname{Im}\gamma$ (v. Fig. 7.1).

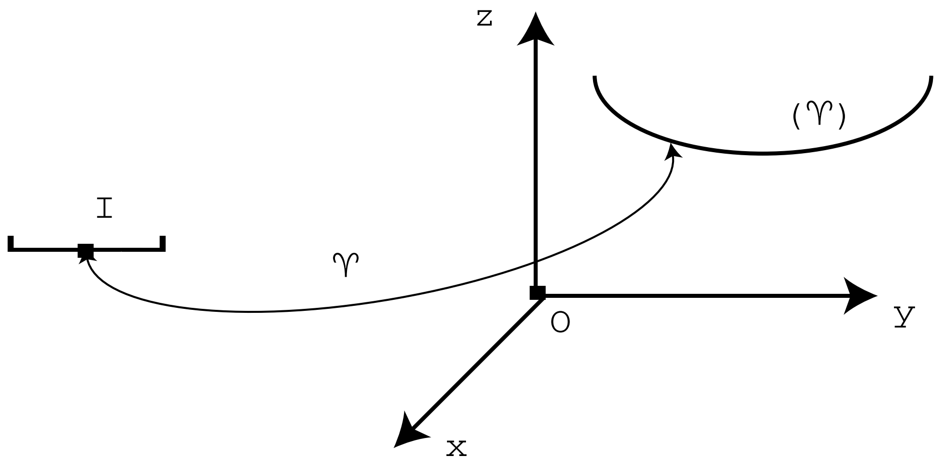

Fig. 7.1: Drumuri parametrizate

Exemplul 7.3. In plan se consideră un reper ortogonal xOy de versori $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$. Mulţimea vectorilor din acest plan este un spaţiu vectorial izomorf cu $\mathbb{R}^2$, asociind fiecărui punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vectorul $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Prin urmare, punctul curent $\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t))$ al urmei drumului (γ) are vectorul de poziţie dat de relaţia $\vec{r}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath}$ cu $f_1, f_2\colon I \to \mathbb{R}$ continue. Relaţiile $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $t \in I$, se numesc *ecuaţiile parametrice* ale drumului parametrizat γ.

Dacă $I = [a, b]$, atunci punctele $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ se numesc *capetele* drumului, iar dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, drumul se numeşte închis.

Consideraţiile precedente se pot extinde pentru drumuri parametrizate în $\mathbb{R}^d$. De exemplu, în $\mathbb{R}^3$, se alege un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, astfel că vectorul de poziţie al punctului curent al urmei unui drum parametrizat γ se scrie $\vec{r} = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$ cu $f_1, f_2, f_3\colon I \to \mathbb{R}$ continue. In general, un drum parametrizat, definit pe intervalul $I = [a, b]$, se scrie

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \dots \\ x_d = f_d(t) \end{cases}, \ t \in [a, b] \tag{7.8}$$

Exemplul 7.4. Drumurile

$$\gamma \ : \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right. , \ t \in [0, \pi]; \qquad \gamma_1 \ : \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{array} \right. , \ t \in [-1, 1]$$

sunt distincte dar au aceeaşi imagine (urmă).

Exemplul 7.5. Drumul $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma \ : \left\{ \begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{array} \right. , \ t \in [0, 2\pi]$$

este elicea cilindrică de pas $h > 0$, situată pe cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$.

Opusul drumului (7.8) este drumul $\gamma^-\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ definit prin $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$; avem $(\gamma) = (\gamma^-)$ şi $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$, ceea ce sugerează parcurgerea drumurilor în sensuri diferite.

Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, atunci drumul se numeşte închis (originea sa coincide cu extremitatea).

Dacă $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ şi $\gamma_1\colon [b, c] \to \mathbb{R}^d$ sunt două drumuri astfel încât $\gamma(b) = \gamma_1(b)$, atunci se poate defini *juxtapunerea (concatenatul)* celor două drumuri, notat $\gamma \cup \gamma_1\colon [a, c] \to \mathbb{R}^d$,

$$\gamma \cup \gamma_1 \ : \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_1(t), & t \in [b, c] \end{cases} .$$

Evident, $(\gamma \cup \gamma_1) = (\gamma) \cup (\gamma_1)$.

Drumul parametrizat 7.8 se zice *neted* dacă este de clasă C^1 şi $\gamma'(t) \neq 0$ (i.e. $(f_1'(t), \ldots, f_d'(t)) \neq (0, \ldots, 0)$) pentru orice $t \in I$. Un drum *neted (de clasă C^1) pe porţiuni* este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede (de clasă C^1). Drumul se numeşte *simplu* dacă, pentru orice $s, t \in I$, $s \neq t$, avem $\gamma(s) \neq \gamma(t)$. Dimpotrivă, dacă $\gamma(s) = \gamma(t)$, punctul respectiv al drumului se numeşte *multiplu*. *Ordinul de multiplicitate* este dat de numărul de puncte distincte din I care au aceeaşi imagine prin γ.

Definiţia 7.4. Două drumuri parametrizate de clasă C^1, $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ şi $\gamma_1\colon [c, d] \to \mathbb{R}^d$ se numesc *echivalente cu aceeaşi orientare* (se scrie $\gamma \sim \gamma_1$) dacă există o funcţie continuă $\varphi\colon [a, b] \to [c, d]$ cu următoarele proprietăţi:

1. φ este un difeomorfism de la (a, b) la (c, d);

2. $\gamma_1 \circ \varphi = \gamma$;

3. $\varphi'(t) > 0$ pentru orice $t \in (a, b)$, i.e. φ este strict crescăroare.

Dacă $\gamma \sim \gamma_1$, atunci evident $(\gamma) = (\gamma_1)$.

Relaţia $''\sim''$ defineşte în mulţimea drumurilor o relaţie de echivalenţă (i.e. este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, v, §1.1). O clasă de echivalenţă în raport cu această relaţie se numeşte *curbă parametrizată de clasă* C^1. Prin urmare o curbă poate reprezentată de orice drum din clasa de echivalenţă care defineşte curba respectivă. Se consideră ca proprietăţi ale curbelor parametrizate acelea care nu depind de parametrizare. O curbă parametrizată de clasă C^1 care este simplă se mai numeşte *jordaniană*.

Exemplul 7.6. Drumurile γ şi γ_1 din exemplul 7.4 sunt echivalente deoarece funcţia $\varphi\colon [0,\pi] \to [-1,1]$, $\varphi(t) = -\cos t$ verifică condiţiile din definiţia 7.4.

Fie $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ un drum neted şi $t_0 \in I$. Notăm $M_0 = \gamma(t_0)$. Pentru $t \in I$, $t \neq t_0$, dacă punem $M = \gamma(t)$, avem egaliatea vectorială

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \gamma(t) - \gamma(t_0)$$

deci $\dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ este colinear cu $\overrightarrow{M_0M}$. Făcând $t \to t_0$, rezultă că $\gamma'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0))$ este colinear cu tangenta în M_0 la urma (imaginea) drumului γ. Ecuaţia tangentei în M_0 la (γ) va fi

$$\frac{x - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{x - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} \tag{7.9}$$

Aceste consideraţii se extind de o manieră evidentă la cazul unui drum neted din $\mathbb{R}^d$. De exemplu, versorul tangentei la un drum neted γ din $\mathbb{R}^3$, în punctul $\gamma(t)$, va fi

$$\vec{\tau}(t) = \frac{f_1'(t)\vec{\imath} + f_2'(t)\vec{\jmath} + f_3'(t)\vec{k}}{\sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3'(t)^2}} \tag{7.10}$$

Versorul $\vec{\tau}'(t)$ se numeşte *versorul normalei principale* la γ şi este notat $\vec{\nu}(t) = \frac{\vec{\tau}'(t)}{\|\vec{\tau}'(t)\|}$, iar $\vec{\beta}(t) = \vec{\tau}(t) \times \vec{\nu}(t)$ este versorul *binormalei.* Triedrul $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ care depinde de t este numit triedrul lui Frenet.

Definiţia 7.5. Fie $A \in \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Se numeşte *curbă plană de clasă C^1 având ecuaţia carteziană* $f(x,y) = 0$, mulţimea $C = \{(x,y) \in A \mid f(x,y) = 0\}$.

Un punct $(x_0, y_0) \in C$ se numeşte singular dacă

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Orice curbă plană parametrizată de clasă C^1 poate fi scrisă prin ecuaţie carteziană în vecinătatea oricărui punct nesingular, aplicând teorema de inversare locală (v. teorema 4.2) şi eliminând parametrul t din cele două ecuaţii parametrice. Reciproc, fie (x_0, y_0) un punct nesingular de pe o curbă cu ecuaţie carteziană şi să presupunem, de exemplu, că $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Atunci, conform teoremei funcţiilor implicite (v. teorema 4.5), există o funcţie $\varphi(x)$ de clasă C^1 în vecinătatea lui x_0 astfel încât $y = \varphi(x)$ în această vecinătate. Prin urmare $x = t$, $y = \varphi(t)$ sunt ecuaţiile parametrice locale ale curbei C. Conform cu (7.9), ecuaţia tangentei în punctul (x_0, y_0) la curba C este

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

şi cum (v. relaţia 4.3) $\varphi'(t_0) = -\dfrac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$, rezultă că ecuaţia tangentei este

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0 \tag{7.11}$$

unde $p = f'_x(x_0, y_0)$, $q = f'_y(x_0, y_0)$.

7.3 Integrale curbilinii

Fie $\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ un drum de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$. Unei diviziuni

$$\Delta \ : \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = b$$

a intervalului $[a, b]$ îi corespund pe (γ) punctele $M(f(t_i), g(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$ care formează o linie poligonală "înscrisă" în (γ) (v. Fig. 7.2). Lungimea

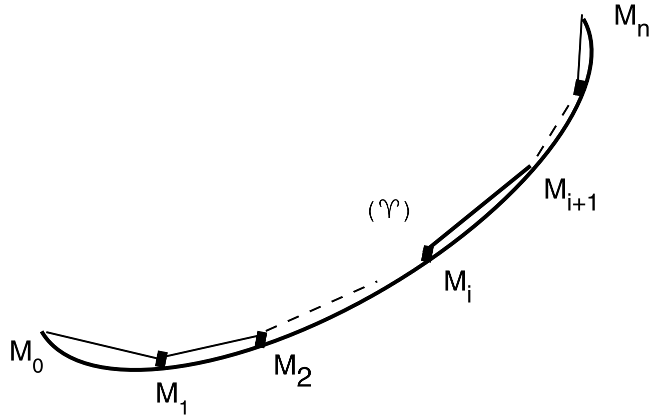

Fig. 7.2: Lungimea drumului

acestei linii poligonale este

$$s_\Delta(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}$$

şi, dacă folosim teorema creşterilor finite a lui Lagrange, rezultă că există punctele $\xi_i, \eta_i \in (t_i, t_{i+1})$ astfel încât

$$s_\Delta(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f'(\xi_i))^2 + (g'(\eta_i))^2}(t_{i+1} - t_i) \tag{7.12}$$

Dacă

$$s(\gamma) = \sup_\Delta s_\Delta(\gamma) < \infty,$$

atunci se zice că drumul γ este *rectificabil* iar valoarea $s(\gamma)$ este *lungimea drumului.*

Teorema 7.1. *Un drum de clasă C^1 este rectificabil şi avem*

$$s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt \tag{7.13}$$

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe relaţia (7.12) şi pe ideea că diferenţa $|s_\Delta(\gamma) - s(\gamma)|$ este cu atât mai mică cu cât diviziunea Δ este mai fină(v. e.g. [17]). Pentru drumuri de clasă C^1 din $\mathbb{R}^3$ relaţia (7.13) devine

$$s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt \tag{7.14}$$

Observaţia 7.2. Este uşor de văzut că teorema 7.1, deci şi relaţiile (7.13) şi (7.14) sunt adevărate şi pentru un drum neted pe porţiuni.

Exemplul 7.7. Să se determine lungimea drumului

$$\gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi], \ (R, h > 0)$$

Din (7.14) rezultă

$$s(\gamma) = R\sqrt{1+h^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R\sqrt{1+h^2}.$$

Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ deschisă, $F\colon U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi

$\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ un drum neted pe porţiuni astfel încât $(\gamma) \subset U$.

Definiţia 7.6. Integrala curbilinie (de speţa I) se defineşte prin

$$\int_\gamma F(x, y, z)\, ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b F(f(t), g(t), h(t))\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\, dt \tag{7.15}$$

Observaţia 7.3. Din consideraţii de mecanică, se poate arăta că dacă se consideră un fir material omogen greu, inextensibil, asimilat cu urma unui drum neted γ ca mai sus şi cu densitatea punctuală $F(x,y,z)$, atunci masa firului este dată de integrala curbilinie (7.14) iar coordonatele centrului de greutate ale firului sunt

$$x = \frac{\int_\gamma f(t)\,ds}{s(\gamma)}, \qquad y = \frac{\int_\gamma g(t)\,ds}{s(\gamma)}, \qquad z = \frac{\int_\gamma h(t)\,ds}{s(\gamma)} \tag{7.16}$$

Din (7.15) şi proprietăţile integralei liniare (definite) rezultă cu uşurinţă

Proprietăţile integralei curbilinii (de speţa I)
Presupunem că funcţiile şi drumurile care apar în relaţiile următoare sunt astfel încât integralele curbilinii au sens conform definiţiei 7.6.

1. (*Linearitate*) Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$\int_\gamma (\alpha F(x,y,z) + \beta G(x,y,z))\,ds = \alpha \int_\gamma F(x,y,z)\,ds + \beta \int_\gamma G(x,y,z)\,ds.$$

2. (*Aditivitate faţă de drum*) Dacă $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, atunci

$$\int_\gamma F\,ds = \int_{\gamma_1} F\,ds + \int_{\gamma_2} F\,ds.$$

3. Dacă $\gamma_1 \sim \gamma_2$, atunci $\displaystyle\int_{\gamma_1} F\,ds = \int_{\gamma_2} F\,ds$.

4. (*Independenţa faţă de sensul de parcurgere*) $\displaystyle\int_{\gamma^-} F\,ds = \int_\gamma F\,ds$.

5. $\displaystyle\int_\gamma ds = s(\gamma)$.

Exemplul 7.8. Pentru $\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2\sqrt{6}}{2} \\ z = t^3 \end{cases}$, $t \in [0,1]$ să se calculeze

$$I = \int_\gamma (x+y)ds.$$

Conform relaţiei (7.15) avem

$$I = \int_0^1 \left(t + \frac{t^2\sqrt{6}}{2}\right)(1+3t^2)dt = \frac{5}{4} + \frac{7\sqrt{6}}{15}$$

Fie $\vec{v}\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ un câmp vectorial continuu şi fie γ ca în definiţia 7.6.

Definiţia 7.7. Se numeşte *circulaţie a lui $\vec{v}$ de-a lungul lui γ* (sau *integrală curbilinie de speţa II-a*) şi se notează

$$\int_\gamma \vec{v}\,d\vec{r} \text{ sau } \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

numărul real

$$\int_a^b [P(f(t),g(t),h(t))\,f'(t)+Q(f(t),g(t),h(t))\,g'(t)+R(f(t),g(t),h(t))\,h'(t)]\,dt$$

Interpretarea fizică a circulaţiei este a lucrului mecanic efectuat de "câmpul de forţe" $\vec{v}$ în lungul drumului γ.

Observaţia 7.4. Dacă drumul γ este închis (i.e. $\gamma(a)=\gamma(b)$), atunci se poate nota $\oint_\gamma$ în loc de $\int_\gamma$.

Proprietăţile circulaţiei

Câmpurile vectoriale şi drumurile care apar în relaţiile următoare sunt astfel încât integralele curbilinii au sens conform definiţiei 7.7.

1. (*Linearitate*) Pentru $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ avem

$$\int_\gamma (\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v})\,d\vec{r} = \alpha\int_\gamma \vec{u}\,d\vec{r} + \beta\int_\gamma \vec{v}\,d\vec{r}.$$

2. (*Aditivitate faţă de drum*) Dacă $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, atunci

$$\int_\gamma \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\,d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\,d\vec{r}.$$

3. Dacă $\gamma_1\sim\gamma_2$, atunci $\displaystyle\int_{\gamma_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{v}\,d\vec{r}$.

4. (*Sensul de parcurgere*) $\displaystyle\int_{\gamma^-} \vec{v}\,d\vec{r} = -\int_\gamma \vec{v}\,d\vec{r}$.

Exemplul 7.9. Să se calculeze circulaţia câmpului $\vec{v}=x\vec{\imath}+xy\vec{\jmath}+xyz\vec{k}$ de a lungul fiecăruia dintre drumurile

$$\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma(t)=(t,t^2,t^3)$$
$$\gamma_1:[0,\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma_1(t)=(t\cos t, t\sin t, t)$$
$$\gamma_2:[-2,1]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma_2(t)=(t,1,2-t)$$

conform definiţiei 7.7 avem

$$I_1 = \int_0^2 (t + 2t^4 + 3t^8)dt = 2 + \frac{2^6}{5} + \frac{2^9}{3}$$
$$I_2 = \int_0^\pi (t\cos^2 t - t^2 \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t \cos t + t^3 \sin t \cos^2 t + t^3 \sin t \cos t)dt = \text{etc.}$$
$$I_3 = \int_{-2}^1 (t^2 - 2t)dt = \text{etc.}$$

7.4 Forme diferenţiale de ordinul I

Fie $U \subset \mathbb{R}^d$ un deschis fixat şi $x = (x_1, \ldots, x_d)$ punctul curent din $\mathbb{R}^d$; o *formă diferenţială de ordinul (gradul) I* sau *1-formă diferenţială* în U este o expresie de tipul

$$\omega = P_1(x_1, \ldots, x_d)dx_1 + \cdots + P_d(x_1, \ldots, x_d)dx_d,$$

unde funcţiile $P_1, \ldots, P_d \colon U \to \mathbb{R}$ sunt numite *coeficienţii formei.* Forma diferenţială se numeşte de clasă C^p dacă funcţiile $P_1, \ldots, P_d$ au această proprietate.

In continuare ne vom referi numai la cazul $d = 3$ pentru care formele diferenţiale sunt

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \tag{7.17}$$

deoarece transpunerea rezultatelor pentru cazul general se face de o manieră evidentă.

Observăm că există o corespondenţă între formele diferenţiale şi câmpurile vectoriale $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$. De asemenea, integrala unei forme diferenţiale de-a lungul unui drum neted pe porţiuni γ se defineşte prin relaţia

$$\int_\gamma \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \vec{v}\, d\vec{r} = \int_\gamma P dx + Q dy + R dz. \tag{7.18}$$

Definiţia 7.8. O formă diferenţială de forma (7.17) se numeşte *exactă în* U dacă există o funcţie $\varphi \in C^1(U)$, numită *primitivă* a formei difernţiale, astfel încât

$$P(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z),\ Q(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z),\ R(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) \tag{7.19}$$

în orice punct $(x,y,z) \in U$.
Forma diferenţială se numeşte *închisă în* U dacă orice punct $(x,y,z) \in U$ are o vecinătate deschisă în care forma diferenţială este exactă.

Relaţiile (7.19) sunt echivalente cu

$$d\varphi = \omega \text{ în orice punct din } U \tag{7.20}$$

Observaţia 7.5. 1. Două primitive ale unei forme diferenţiale definite într-un deschis conex, diferă între ele printr-o constantă.
2. Se poate spune că o formă diferenţială închisă este "local exactă".
3. Relaţiile (7.19) sunt echivalente cu relaţia $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi$ în U; în acest caz, despre $\vec{v}$, se spune că este un *câmp de gradienţi.*
4. Dacă forma diferenţială este închisă în U, atunci câmpul vectorial corespunzător $\vec{v}$ se numeşte *conservativ.*

Teorema 7.2. *Forma diferenţială* (7.17) *este închisă în* U *dacă şi numai dacă în orice punct din* U *sunt verificate relaţiile*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{7.21}$$

Demonstraţie. Fie $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ un punct arbitrar. Dacă forma ω este exactă, atunci există o funcţie φ de clasă C^2 într-o vecinătate deschisă a lui u care verifică (7.19) în orice punct din acestă vecinătate. Conform criteriului lui Schwarz (v. teorema 3.8), derivatele mixte ale lui φ sunt egale. Astfel din egalitatea

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

rezultă prima egalitate (7.21), i.e.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

iar celelalte se demonstrează similar.
Reciproc, presupunem că (7.21) au loc într-o bilă deschisă $B(u_0)$ cu centrul în $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Pentru orice punct $u = (x, y, z) \in B$ segmentul $[u_0, u] \subset B(u_0)$ iar un punct de pe acest segment poate fi scris $\xi = u_0 + t(u - u_0)$, $0 \leq t \leq 1$. Acum putem defini funcţia

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^1 [P(\xi)(x - x_0) + Q(\xi)(y - y_0) + R(\xi)(z - z_0)]dt \tag{7.22}$$

Conform teoremei 6.13 rezultă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u) = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi)t(x - x_0) + P(\xi)\right) + \frac{\partial Q}{\partial x}(\xi)t(y - y_0) + \frac{\partial R}{\partial x}(\xi)t(z - z_0)\right] dt.$$

Folosind (7.21) obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u) &= \int_0^1 \left[t \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi)(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(\xi)(y-y_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(\xi)(z-z_0) \right) + P(\xi) \right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}[t\, P(\xi)]dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}[t\, P(u_0 + t(u-u_0))]dt \\
&= t\, P(u_0 + t(u-u_0)) \Big|_0^1 = P(u).
\end{aligned}$$

In acelaşi fel va rezulta $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(u) = Q(u)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(u) = R(u)$. Prin urmare, funcţia φ definită în mulţimea deschisă $B(u_0)$ este o primitivă a lui ω. Deoarece punctul $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ este arbitrar va rezulta că în vecinătatea oricărui punct din U forma diferenţială ω admite primitivă, i.e. ω este închisă. $\square$

Corolarul 7.1. *Un câmp vectorial definit într-un deschis este conservativ dacă şi numai dacă sunt verificate relaţiile* (7.21).

Teorema următoare caracterizează formele diferenţiale exacte.

Teorema 7.3. *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis conex şi $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ o formă diferenţială de ordinul I continuă în U. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) ω este exactă în U;
b) pentru orice drum parametrizat neted pe porţiuni şi închis, situat în U avem $\int_\gamma \omega = 0$;
c) dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri parametrizate, netede pe porţiuni şi cu aceleaşi capete, situate în U, atunci avem $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b) Fie φ o primitivă a lui ω în U şi $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [a, b]$ un drum neted pe porţiuni şi închis, situat în U. Din (7.18) rezultă

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_a^b [P(\gamma(t))f'(t) + Q(\gamma(t))g'(t) + R(\gamma(t))h'(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[\varphi(\gamma(t))]dt \\
&= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(b)) = 0
\end{aligned}$$

deoarece drumul este închis.
b) $\Rightarrow$ c) Dacă juxtapunerea $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$, atunci γ este neted pe porţiuni şi închis; prin urmare

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega = \int_\gamma \omega = 0.$$

c) $\Rightarrow$ a) Fixăm un punct $a \in U$. Pentru orice punct $u = (x, y, z) \in U$ definim funcţia

$$\varphi(x, y, z) = \int_\gamma \omega \tag{7.23}$$

unde γ este un drum oarecare, neted pe porţiuni care uneşte pe a cu u. Conform ipotezei c), această integrală nu depinde de alegerea lui γ şi astfel funcţia φ este bine definită. Vom arăta că φ este o primitivă a lui ω. Intr-adevăr, dacă $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ este un punct arbitrar din U, avem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + t, y_0, z_0) - \varphi(x_0, y_0, z_0)}{t} \tag{7.24}$$

şi, notând cu δ segmentul în U care uneşte punctele (x_0, y_0, z_0) şi $(x_0 + t, y_0, z_0)$, rezultă

$$\varphi(x_0 + t, y_0, z_0) - \varphi(x_0, y_0, z_0) = \int_\delta \omega.$$

Deoarece ecuaţiile parametrice ale lui δ sunt $x = x_0 + \tau$, $y = y_0$, $z = z_0$, $0 \le \tau \le t$, rezultă

$$\varphi(x_0 + t, y_0, z_0) - \varphi(x_0, y_0, z_0) = \int_0^t P(x_0 + \tau, y_0, z_0)\, d\tau.$$

Folosind formula de medie pentru integrală obţinem

$$\varphi(x_0 + t, y_0, z_0) - \varphi(x_0, y_0, z_0) = tP(x_0 + \theta, y_0, z_0),$$

unde $0 < \theta < t$. inlocuind în (7.24), rezultă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t \to 0} P(x_0 + \theta, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, z_0).$$

Demonstraţia pentru celelalte derivate parţiale ale lui φ se face similar, iar punctul (x_0, y_0, z_0) este arbitrar. $\square$

Corolarul 7.2. *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis conex şi $\vec{v}$ un câmp vectorial continuu U. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) $\vec{v}$ este un câmp de gradienţi în U;
b) circulaţia lui $\vec{v}$ de-a lungul oricărui drum parametrizat neted pe porţiuni şi închis, situat în U, este nulă;
c) circulaţiile lui $\vec{v}$ de-a lungul a două drumuri parametrizate, netede pe porţiuni şi cu aceleaşi capete, situate în U, sunt egale.

Demonstraţie. Corolarul reprezintă doar transpunerea teoremei 7.3 pentru câmpuri vectoriale. $\square$

Corolarul 7.3. *Fie $\omega = Pdx+Qdy$ o formă difernţială exactă îtr-un deschis $D \subset \mathbb{R}^2$. Dacă φ este o primitivă a lui ω, atunci*

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt,\ (x,y) \in D \tag{7.25}$$

unde (x_0, y_0) un punct din D astfel încât D conţine segmentele $A(x_0,y_0)B(x,y_0)$ şi $B(x,y_0)C(x,y)$.

Demonstraţie. Se aplică relaţia (7.23) în care se ia $\gamma = ABC$. □

Observaţia 7.6. Pentru forme diferenţiale exacte $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ din $\mathbb{R}^3$, relaţia (7.25) devine

$$\varphi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt,\ (x,y,z) \in D \tag{7.26}$$

unde alegerea punctului (x_0, y_0, z_0) este similară cu cea din corolarul 7.3.

Exemplul următor ilustrează, pe de o parte, faptul că o formă diferenţială închisă nu este neapărat exactă, iar pe de altă parte, că aceasta poate fi totuşi exactă într-un domeniu mai restrâns.

Exemplul 7.10. Fie $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ care este definită în domeniul $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Avem $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ şi $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; se verifică cu uşurinţă

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2},$$

astfel că ω este închisă D, conform teoremei 7.2.

Să considerăm acum drumul $\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$. Se verifică imediat că

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t)dt = 2\pi \neq 0$$

deci, conform teoremei 7.3, ω nu este exactă în D. Pe de altă parte ω este exactă în deschisul $D' = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\} \subset D$, deoarece $\varphi(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ este o primitivă a sa în D'.

Intrucât verificarea faptului că o formă diferenţială este închisă este relativ simplă (v. teorema 7.2), rezultă că stabilirea condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească o formă diferenţială închisă pentru a fi exactă sunt foarte utile. Din cele precedente se poate intui că aceste condiţii trebuie să se refere la domeniul pe care este definită forma diferenţială.

Definiţia 7.9. Un mulţime $D \subset \mathbb{R}^d$ este numită *stelată relativ la punctul* $a \in D$ dacă, pentru orice $x \in D$, segmentul $[a,x] \subset D$.

Teorema 7.4. *O formă diferenţială închisă ω, definită într-un deschis stelat $D \subset \mathbb{R}^3$ relativ la un punct $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, este exactă.*

Demonstraţie. Se defineşte funcţia φ prin relaţia (7.22) şi la fel ca în teorema 7.2 se arată că aceasta este o primitivă pentru ω. $\square$

Observaţia 7.7. Teorema 7.4 este valabilă pentru forme diferenţiale definite în deschişi din $\mathbb{R}^d$.

Exemplul 7.11. Să se determine o primitivă a formei diferenţiale

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$$

în semi-planul $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$.

Mai întâi observăm că

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x^2 - 3y^2}{(3x^2 - 2xy + 3y^2)^2},$$

deci, conform teoremei 7.4, ω este exactă. Aplicând formula (7.25) cu $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ se obţine

$$\varphi(x, y) = -\int_0^y \frac{x}{3x^2 - 2xt + 3t^2} dt = -\frac{x}{3}\int_0^y \frac{dt}{(t - \frac{x}{3})^2 + \frac{8x^2}{9}}$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3t - x}{2x\sqrt{2}}\Big|_0^y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - 3y}{2x\sqrt{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Exemplul 7.12. Să se determine o primitivă a formei diferenţiale

$$\omega = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$$

definite în $\mathbb{R}^3$.

Observăm că

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2z; \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = -2x; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -2y.$$

şi se aplică (7.26) cu $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ pentru a obţine

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C,\ C \in \mathbb{R}$$

7.5 Suprafeţe şi integrale de suprafaţă

Definiţia 7.10. O *pânză parametrizată de clasă* C^k în $\mathbb{R}^3$ este o aplicaţie

$$s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \to s(u, v) = (x, y, z)$$

pe un deschis (de obicei un dreptunghi) conex $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.

Pânza de supraftă se indică prin relaţiile

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases},\ (u, v) \in \Delta$$

numite *ecuaţiile parametrice ale pânzei* s, iar imaginea $s(\Delta)$ se numeşte *urma pânzei* şi se mai notează (s).

Dacă spaţiul $\mathbb{R}^3$ este raportat la un sistem ortogonal $Oxyz$ de versori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, atunci punctul curent $s(u,v) \in (s)$ are vectorul de poziţie $\vec{r}$ dat de relaţia

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \tag{7.27}$$

Două pânze de suprafaţă $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$, $s_1\colon \Delta_1 \to \mathbb{R}^3$, de clasă C^1 se consideră *echivalente* (se scrie $s \sim s_1$) dacă există un difeomorfism $\varphi\colon \Delta \to \Delta_1$ astfel încât $s = s_1 \circ \varphi$. Aplicaţia φ se numeşte *schimbare de parametri.* Se verifică imediat că două pânze de suprafaţă echivalente au aceeaşi urmă. De altfel, relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă (i.e. este reflexivă, simetrică şi tranzitivă) în mulţimea pânzelor parametrizate de clasă C^1. O *suprafaţă parametrizată de clasă* C^1 este o clasă de echivalenţă de pânze parametrizate, echivalente.

O pânză de suprafaţă $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$ se numeşte *simplă* dacă aplicaţia s este injectivă. Dacă matricea jacobiană a lui s, i.e. matricea

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

are rangul doi în orice punct din Δ, atunci pânza de suprafaţă se numeşte *nesingulară.*

Folosind (7.27) rezultă că putem nota

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}, \qquad \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

şi va rezulta condiţia de nesingularitate echivalentă $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ în orice punct din Δ.

Fie $(u_0, v_0) \in \Delta$ şi $P(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ punctul corespunzător pe (s). Aplicaţiile $u \to \vec{r}(u, v_0)$ şi $v \to \vec{r}(u_0, v)$ reprezintă două drumuri γ_u şi γ_v de clasă C^1 care se găsesc pe (s) şi trec prin punctul P (v. Fig. 7.3). Planul ce trece prin P şi conţine vectorii $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ (care sunt tangenţi la γ_u şi respectiv γ_v), deci având normala $\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0)$, se numeşte *planul tangent la* s *în punctul* P iar ecuaţia sa este

$$\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.28}$$

Fie $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$ o pânză de suprafaţă simplă şi nesingulară de clasă C^1 cu urma $\Sigma = s(\Delta)$. Versorul $\vec{N} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$, având proprietatea că

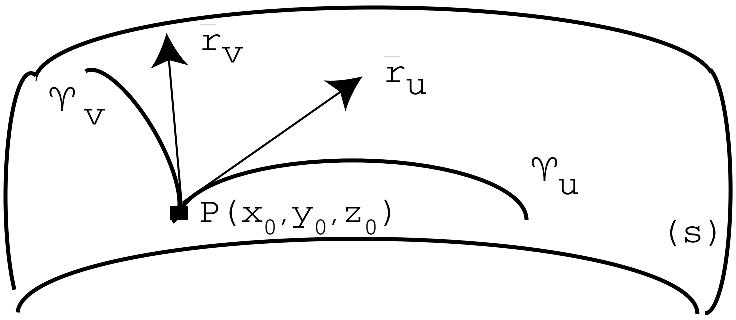

Fig. 7.3: Plan tangent

triedrele $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{N}\}$ şi $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ au aceeaşi orientare, este numit *normala la suprafaţa* Σ în punctul curent. In fapt există doi versori normali $\pm\vec{N}$ care definesc *orientarea pe* Σ. Mai precis, se numeşte *orientare pe* Σ aplicaţia continuă definită pe Σ cu valori în spaţiul vectorial cu baza formată din versorii $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, care asociază fiecărui punct $P \in \Sigma$ unul din vectorii $\vec{N}_P$ sau $-\vec{N}_P$. Corespondenţa $P \to \{-1, 1\}$ va fi continuă şi, cum Σ este conexă, corespondenţa anterioară este constantă. Prin urmare există numai două aplicaţii, ambele constante, una egală cu $+1$ (orientarea pozitivă), cealaltă egală cu -1 (orientarea negativă). Dacă pe Σ există o orientare, se spune că Σ este orientabilă şi are două feţe. Dacă pânzele de suprafaţă s şi s_1 sunt echivalente (φ fiind schimbarea de parametri), iar $\det J_\varphi > 0$ în orice punct, atunci cele două pânze echivalente au aceeaşi orientare; aceasta înseamnaă că $\vec{N}_P = \vec{N}_{P_1}$ oricare ar fi punctele coresondente P şi P_1 de pe cele două suprafeţe.

Exemplul 7.13. Octantul de sferă $\Sigma\ :\ \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$ este urma pânzei definită prin ecuaţiile parametrice

$$s\ :\ \begin{cases} x = R\sin u\cos v \\ y = R\sin u\sin v \\ z = R\cos u \end{cases},\ u \in (0, \frac{\pi}{2}),\ v \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

O altă parametrizare a aceluiaşi octant este

$$s_1\ :\ \begin{cases} x = u_1 \\ y = v_1 \\ z = \sqrt{R^2 - u_1^2 - v_1^2} \end{cases},\ u_1 > 0, v_1 > 0, u_1^2 + v_1^2 < R^2.$$

In cazul primei parametrizări avem

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= R\sin u\cos v\,\vec{\imath} + R\sin u\sin v\,\vec{\jmath} + R\cos u\,\vec{k}\\
\vec{r}_u &= R\cos u\cos v\,\vec{\imath} + R\cos u\sin v\,\vec{\jmath} - R\sin u\,\vec{k}\\
\vec{r}_v &= -R\sin u\sin v\,\vec{\imath} + R\sin u\cos v\,\vec{\jmath}\\
\vec{N} &= \sin u\cos v\,\vec{\imath} + \sin u\sin v\,\vec{\jmath} + \cos u\,\vec{k}
\end{aligned}$$

Definiţia 7.11. Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Se numeşte *suprafaţă de clasă C^1 cu ecuaţia carteziană* $f(x,y,z)=0$, mulţimea $S = \{(x,y,z) \in A \mid f(x,y,z) = 0\}$.

Un punct $(x_0,y_0,z_0) \in S$ este singular dacă derivatele parţiale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$$

adică punctul respectiv este un punct critic al funcţiei f. Folosind teorema 4.5 se poate demonstra cu uşurinţă că o suprafaţă parametrizată de clasă C^1, în vecinătatea oricărui punct nesingular, poate fi dată local printr-o ecuaţie carteziană (eliminând parametrii). Reciproc, suprafaţa S dată cartezian ca mai sus poate fi local parametrizată în vecinătatea oricărui punct nesingular. De exemplu, dacă $a = (x_0,y_0,z_0)$ este nesingular şi $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) \neq 0$, atunci există o funcţie $\varphi(x,y)$ de clasă C^1 în vecinătatea lui (x_0,y_0) astfel încât în $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$; de aici rezultă parametrizarea locală $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(x,y)$. Prin urmare $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \varphi(x,y)\,\vec{k}$; deoarece $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}$ vom avea

$$\vec{r}_u = \vec{\imath} - \frac{f'_x}{f'_z}\vec{k}, \quad \vec{r}_v = \vec{\jmath} - \frac{f'_y}{f'_z}\vec{k}, \quad \vec{N} = \pm\frac{f'_x\,\vec{\imath} + f'_y\,\vec{\jmath} + f'_z\,\vec{k}}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}} \tag{7.29}$$

Sensul normalei se alege după context.

Ecuaţia planului tangent la S în $P(x_0,y_0,z_0)$ se obţine scriind că, pentru orice punct $M(x,y,z)$ al acestui plan, vectorii $\overrightarrow{PM}$ şi $\vec{N}$ sunt ortogonali; vom avea

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \tag{7.30}$$

Definiţia 7.12. Fie $U \in \mathbb{R}^3$ un deschis şi φ un câmp scalar de clasă $C^1(U)$. Dacă $C \in \mathbb{R}$, atunci se numeşte *suprafaţă de nivel* asociată perechii (φ, C) suprafaţa S_C de ecuaţie carteziană $\varphi(x,y,z) = C$.

Aşadar, pe întrega suprafaţă S_C câmpul are o valoare constantă. Prin orice punct $(x_0,y_0,z_0) \in S_C$ trece o unică suprafaţă de nivel, anume aceea pentru care $C = \varphi(x_0, y_0, z_0)$. De exemplu, dacă φ este câmpul temperaturilor (respectiv al presiunilor) dintr-o zonă fixată, suprafeţele de nivel corespunzătoare se numesc *izoterme* (respectiv *izobare*).

Fie acum $a \in U$ şi $\vec{s}$ un versor din $\mathbb{R}^3$. Din (7.29) rezultă că vectorul $\mathrm{grad}_a\varphi$ are direcţia normalei la suprafaţa de nivel S a câmpului scalar $\varphi \in C^1$ care trece prin punctul a, i.e. la suprafaţa de ecuaţie $\varphi(x, y, z) = \varphi(a)$. Reamintim că între derivata după direcţia $\vec{s}$ şi vectorul $\mathrm{grad}_a\varphi$ există relaţia

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}}(a) = \vec{s}\cdot\mathrm{grad}_a\varphi = \|\mathrm{grad}_a\varphi\|\cos\theta$$

unde θ este unghiul dintre vectorii $\vec{s}$ şi $\mathrm{grad}_a\varphi$. Prin urmare, dintre toţi versorii $\vec{s}$, cel pentru care $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}}(a)$ este extremă (maximă sau minimă) este unul din versorii vectorului $\mathrm{grad}_a\varphi$ (deoarece $\cos\theta = \pm 1$). Această proprietate a gradientului arată rolul deosebit al acestuia în studiul variaţiei câmpurilor scalare şi constituie totodată ideea de bază în elaborarea metodelor de gradient din Analiza numerică.

Fie Δ un deschis conex din $\mathbb{R}^2$ şi $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$ o pânză parametrizată de clasă C^1, simplă şi nesingulară, având ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \ (u, v) \in \Delta.$$

Definiţia 7.13. Pentru orice submulţime măsurabilă $M \subset \Delta$ se numeşte *aria porţiunii de suprafaţă* $s(M)$ numărul real pozitiv

$$\sigma[s(M)] \overset{\text{def}}{=} \iint_M \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\, dudv \tag{7.31}$$

Justificarea acestei definiţii este similară cu cea dată pentru lungimea curbelor (v. (7.13)) şi poate fi găsită în [2], [17], [21], [22].

Exemplul 7.14. Pentru octantul de sferă din exemplul 7.13, conform cu (7.31), avem

$$\sigma(\Sigma) = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Considerăm cazul particular al unei suprafeţe de clasă C^1 dată cartezian prin $z = f(x, y)$ unde $f \in C^1(\Delta)$ (suprafaţă proiectabilă pe xOy). Dacă $M \subset \Delta$ este măsurabilă şi Σ porţiunea corespunzătoare din suprafaţă, atunci folosind parametrizarea

$$\vec{r}(x, y) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + f(x, y)\,\vec{k}, \ \ (x, y) \in M, \tag{7.32}$$

avem $\vec{r}_x = \vec{\imath} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{k}$, $\vec{r}_y = \vec{\jmath} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{k}$, şi din (7.30) obţinem

$$\sigma(\Sigma) = \iint_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \tag{7.33}$$

Exemplul 7.15. Să se determine aria porţiunii din suprafaţa $az = xy$, $(a > 0)$, care se găseşte în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$.

Dacă punem $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y) = \frac{xy}{a}$, atunci se aplică (7.33) şi avem

$$\begin{aligned}\sigma(\Sigma) &= \iint_M \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{a^2}}\, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3a}(\sqrt{a^2+1}(a^2+1) - a^3).\end{aligned}$$

Fie $\Sigma = s(M)$ o porţiune de suprafaţă ca în definiţia 7.13, $U \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă ce conţine pe Σ, iar $F\colon U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Definiţia 7.14. Se numeşte *integrală de suprafaţă a funcţiei F pe Σ* numărul real

$$\int_\Sigma F(x, y, z) d\sigma \overset{\text{def}}{=} \iint_M F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\, dudv \quad (7.34)$$

Expresia diferenţială $d\sigma = \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\, dudv$ este numită *element de suprafaţă.*

Observaţia 7.8. Integrala de suprafaţă poate fi notată şi $\iint_\Sigma F(x, y, z) d\sigma$.

Proprietăţile următoare rezultă cu uşurinţă din definiţia 7.14 şi din proprietăţile integralei duble.

Proprietăţile integralei de suprafaţă

1. (*Linearitatea*) Dacă F şi G sunt funcţii continue pe un deschis ce conţine Σ

$$\int_\Sigma (\alpha F + \beta G) d\sigma = \alpha \int_\Sigma F\, d\sigma + \beta \int_\Sigma G\, d\sigma, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. (*Aditivitatea în raport cu suprafaţa*) Dacă Σ este juxtapunerea (similar cu juxtapunerea a două drumuri !) a două porţiuni de suprafaţă Σ_1 şi Σ_2 care au în comun cel mult părţi ale bordurilor, atunci

$$\int_\Sigma F\, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F\, d\sigma$$

3. Considerăm cazul particular al unei suprafeţde clasă C^1 dată cartezian prin $z = f(x, y)$ unde $f \in C^1(\Delta)$ (suprafaţă proiectabilă pe xOy). Dacă $M \subset \Delta$ este măsurabilă şi Σ porţiunea corespunzătoare din suprafaţă, avem

$$\int_\Sigma F(x, y, z)\, d\sigma = \iint_M F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \quad (7.35)$$

4. Aria unei porţiuni de suprafaţă Σ ca în definiţia 7.14 este

$$\sigma(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma$$

Exemplul 7.16. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_\Sigma (x^2 + y^2) d\sigma$ unde Σ este porţiunea din suprafaţa conică $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ delimitată de $0 \le z \le 1$.

Pentru $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ folosim (7.35) şi avem

$$\begin{aligned} I &= \iint_M (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy \\ &= \sqrt{2} \iint_M (x^2 + y^2) dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Fie Σ o suprafaţă orientabilă şi U o mulţime deschisă care conţine urma lui Σ, iar $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ un câmp vectorial continuu definit pe U.

Definiţia 7.15. Se numeşte *fluxul câmpului* $\vec{v}$ *prin suprafaţa* Σ *corespunzător normalei la suprafaţă* $\vec{N}$, numărul

$$\Phi_\Sigma(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Sigma \vec{v}\, \vec{N}\, d\sigma$$

Dacă alegem cealaltă orientare pe suprafaţă, atunci $\vec{N}$ se înlocuieşte cu $-\vec{N}$ şi fluxul corespunzător va fi $-\Phi_\Sigma(\vec{v})$.

Presupunem $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ cu $(u, v) \in M$; atunci $\pm\vec{N} = \pm \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$, astfel că

$$\pm\Phi_\Sigma(\vec{v}) = \pm \iint_M \vec{v}(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv = \pm \iint_M (\vec{v}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) dudv,$$

unde

$$(\vec{v}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Considerăm cazul particular al unei suprafeţde clasă C^1 dată cartezian prin $z = f(x, y)$ unde $f \in C^1(\Delta)$ (suprafaţă proiectabilă pe xOy). Dacă $M \subset \Delta$ este măsurabilă şi Σ porţiunea corespunzătoare din suprafaţă, avem $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + f(x, y)\vec{k}$, astfel că

$$\begin{aligned} &\pm\, \Phi_\Sigma(\vec{v}) = \\ &\pm \iint_M \left(-P(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} - Q(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} + R(x, y, f(x, y)) \right) dxdy \end{aligned} \tag{7.36}$$

Observaţia 7.9. Fluxul câmpului $\vec{v}$ prin suprafaţa Σ se mai notează

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$$

şi mai este numit *integrală de suprafaţă de speţa a doua.*

Exemplul 7.17. Să se calculeze fluxul câmpului $\vec{v} = (y-z)\vec{\imath} + (z-x)\vec{\jmath} + (x-y)\vec{k}$ prin suprafaţa $\Sigma : \begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$, $(h>0)$, după normala exterioară (care "iese") la suprafaţa conică.

Normala indicată face un unghi obtuz cu $\vec{k}$, deci $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$. Cum $\vec{N}$ este unul din versorii $\pm\dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$, rezultă că trebuie ales semnul minus, iar fluxul căutat va fi (v. (7.36))

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{v}) =$$

$$\iint_M \left[(y-\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (\sqrt{x^2+y^2}-x)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x-y)\right] dxdy$$

$$= 2\iint_M (y-x)dxdy$$

unde $M = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < h^2\}$. Efectuând o schimbare de variabile polare găsim

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{v}) = \int_0^h \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} (\sin\theta - \cos\theta)d\theta = 0.$$

7.6 Formule integrale

In acestă secţiune vor fi prezentate formulele integrale clasice care stabilesc legături între integralele curbilinii, duble, de suprafaţă sau triple, numite generic *formule stokiene.*

O mulţime $M \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte *compact bordat* sau *compact cu bord* dacă M este compactă şi frontiera sa $C = \mathrm{Fr}\,M$ este reuniunea unui număr finit de curbe plane parametrizate de clasă C^1 pe porţiuni, nesingulare, simple şi închise. Pentru orice $P \in C$ curba C împarte planul în două regiuni, una conţinând punctele lui M, iar cealaltă punctele din $\mathbb{R}^2 \setminus M$ (v. Fig. 7.4). Notăm cu $\vec{V}$ versorul normalei în punctul curent la C, care este orientat spre interiorul compactului. Dintre cei doi versori ai tangentei la C se alege acela, notat $\vec{T}$, astfel încât reperul $(\vec{T}, \vec{V})$ să fie orientat la fel ca $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; în acest mod este fixat "sensul pozitiv al tangentei" căruia îi corespunde un sens de parcurs pe C, adică o orientare pozitivă pe C.

Exemple importante de compacţi bordaţi sunt intergraficele proiectabile pe Ox sau pe Oy (v. §6.1).

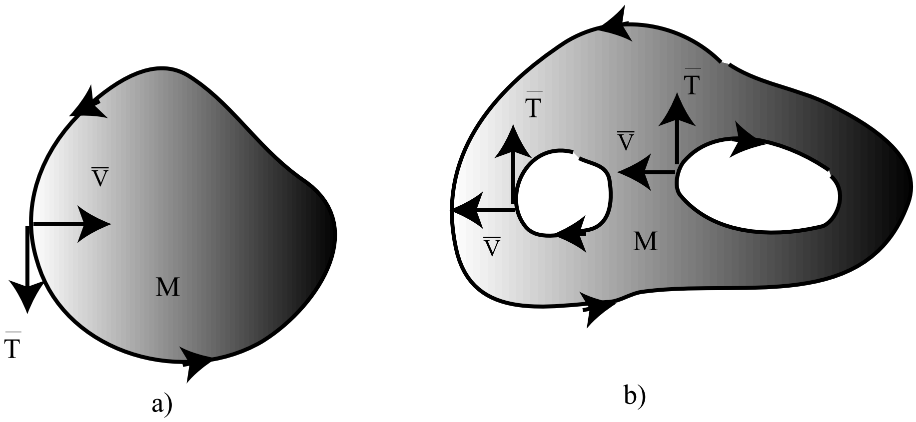

Fig. 7.4: Orientarea frontierei unui compact

Definiţia 7.16. Un compact bordat $M \subset \mathbb{R}^2$ este *elementar* dacă M se poate descompune într-o reuniune finită de intergrafice proiectabile pe Ox, precum şi într-o reuniune finită de intergrafice proiectabile pe Oy; două astfel de intergrafice nu pot avea în comun decât părţi ale frontierelor.

Fie M este un compact bordat elementar, $M = \bigsqcup_{i=1}^{p} M_i$ o descompunere ca mai sus, $U \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă care conţine pe M, iar $P, Q\colon U \to \mathbb{R}$ continue. Tinând seamă de proprietăţile integralei curbilinii rezultă

$$\oint_{\operatorname{Fr} M} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{p} \oint_{\operatorname{Fr} M_i} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{7.37}$$

Teorema 7.5. *(*Formula Green-Riemann*) Fie $M \subset \mathbb{R}^2$ un compact bordat elementar şi P, Q funcţii de clasă C^1 pe un deschis care conţine pe M. Atunci*

$$\oint_{\operatorname{Fr} M} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{7.38}$$

orientarea pe Fr M *fiind cea pozitivă.*

Demonstraţie. Mai întâi vom demonstra că

$$\oint_{\operatorname{Fr} M} P(x,y)\,dx = -\iint_M \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy \tag{7.39}$$

Tinând seamă de (7.38) şi de proprietatea de aditivitate faţă de mulţime a integralei duble, rezultă că este suficient să considerăm cazul când M este un intergrafic proiectabile pe Ox (v. Fig. 5.2, a)). In acest caz Fr M este juxtapunerea următoarelor drumuri

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}, t \in [a, b]; \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}, t \in [\varphi(b), \psi(b)];$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = \psi(a + b - t) \end{cases}, t \in [a, b]; \quad \gamma_4 : \begin{cases} x = a \\ y = t \end{cases}, t \in [\varphi(a), \psi(a)];$$

Prin urmare,

$$\oint_{\mathrm{Fr}\, M} P(x, y)\, dx = \sum_{j=1}^{4} \oint_{\gamma_j} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(t, \varphi(t))dt + \int_a^b P(t, \psi(a + b - t))dt$$

$$= \int_a^b P(t, \varphi(t))dt - \int_a^b P(t, \psi(t))dt = \int_a^b [P(t, \varphi(t)) - P(t, \psi(t))]dt$$

Pe de altă parte,

$$\int_M \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))]dx$$

şi (7.39) este demonstrată.

Similar, se consideră M ca o reuniune de intergrafice proiectabile pe Oy şi se demonstrează relaţia

$$\oint_{\mathrm{Fr}\, M} Q(x, y)\, dy = \iint_M \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy \tag{7.40}$$

Prin adunarea relaţiilor (7.39) şi (7.40) rezultă (7.38). □

Corolarul 7.4. *In condiţiile teoremei 7.5 avem*

$$\mathrm{aria}\, M = \frac{1}{2} \oint_{\mathrm{Fr}\, M} x\, dy - y\, dx \tag{7.41}$$

Demonstraţie. Luăm $P(x, y) = -\frac{y}{2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{2}$ şi aplicăm (7.38). □

Exemplul 7.18. Fie $I = \oint_{\mathrm{Fr}\, M} ydx + 2xdy$, unde $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Deoarece $P = y$, $Q = 2x$, avem $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, astfel că $I = \iint_M dxdy = \mathrm{aria}\, M = \frac{\pi}{2}$.

In continuare vom stabili o legătură între integrala de suprafaţă şi integrala triplă, care este analogul tridimensional al formulei Green-Riemann.

Vom admite intuitiv ideea de *suprafaţă închisă* care împarte spaţiul în două regiuni: interioară şi exterioară suprafeţei; orice dreaptă determinată de un punct exterior şi de unul interior va intersecta suprafaţa.

O mulţime $V \subset \mathbb{R}^3$ este numită *compact elementar* dacă poate fi descompusă într-o reuniune finită de intergrafice proiectabile pe xOy, precum şi într-o reuniune finită de intergrafice proiectabile pe yOz, precum şi într-o reuniune finită de intergrafice proiectabile pe zOx; două astfel de intergrafice nu pot avea în comun decât cel mult părţi ale frontierelor.

Teorema 7.6. *(*Formula Gauss-Ostrogradski*) Fie $V \in \mathbb{R}^3$ un compact elementar cu frontiera o suprafaţă închisă Σ şi $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis care conţine pe V. Dacă $\vec{N}$ este normala exterioară la Σ avem*

$$\int_\Sigma (\vec{v} \cdot \vec{N}) d\sigma = \iiint_V (\operatorname{div} \vec{v})\, dxdydz \tag{7.42}$$

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu cea a formulei (7.38). Astfel folosind definiţia compactului elementar se vor demonstra mai întâi relaţiile

$$\int_\Sigma R(\vec{k} \cdot \vec{N}) d\sigma = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz \tag{7.43}$$

$$\int_\Sigma R(\vec{\jmath} \cdot \vec{N}) d\sigma = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz \tag{7.44}$$

$$\int_\Sigma P(\vec{\imath} \cdot \vec{N}) d\sigma = \iiint_V \frac{\partial x}{\partial z}\, dxdydz \tag{7.45}$$

prin adunarea cărora va rezulta (7.42).

Vom demonstra spre exemplificare (7.43). Deoarece V poate fi descompus într-o reuniune finită de intergrafice proiectabile pe xOy putem presupune că V este un astfel de intergrafic (v. proprietăţile de aditivitate ale integralelor de suprafaţă şi duble). Referindu-ne la Fig. 6.2, observă că $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, unde

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \mid\ z = \varphi(x,y), (x,y) \in M\},\ \vec{N}_{\Sigma_1} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} - \vec{k}}{\sqrt{(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2 + 1}},$$

$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \mid\ z = \psi(x,y), (x,y) \in M\},\ \vec{N}_{\Sigma_2} = \frac{-\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{(\frac{\partial\psi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\psi}{\partial y})^2 + 1}},$$

$$\Sigma_3 = \{(x,y,z) \mid\ (x,y) \in \operatorname{Fr} M, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\},\ \vec{N}_{\Sigma_3} \cdot \vec{k} = 0$$

□

Prin urmare, membrul stâng din (7.43) este

$$\int_{\Sigma_1} R(\vec{k} \cdot \vec{N}) d\sigma + \int_{\Sigma_2} R(\vec{k} \cdot \vec{N}) d\sigma =$$

$$- \iint_M R(x,y,\varphi(x,y))dxdy + \iint_M R(x,y,\psi(x,y))dxdy$$

$$= \iint_M [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]dxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

Exemplul 7.19. Fie $\vec{v} = \vec{r}$ iar $V \subset \mathbb{R}^3$ un compact elementar a cărui frontieră este o suprafaţă închisă Σ cu normala exterioară $\vec{N}$. Avem

$$\int_\Sigma \vec{v}\,\vec{N}\,d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} v\,dxdydz = 3\iiint_V dxdydz = 3\mathrm{vol}\,V$$

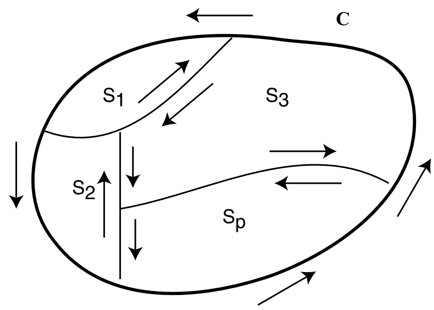

Fig. 7.5: Suprafeţe elementare

Un *element de suprafaţă bordată* în $\mathbb{R}^3$ este o submulţime $S \subset \mathbb{R}^3$ cu proprietatea: exisă o pânză simplă şi nesingulară de clasă C^2, $s\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$ şi un compact bordat $M \subset \Delta$, astfel încât $S = s(M)$. Mulţimea $C = s(\mathrm{Fr}\,M)$ se numeşte bordul lui S. Fie $\vec{\tau}$ versorul tangentei la C în punctul curent P al lui C, N_e versorul normalei exterioare la bordul C (care este situat în planul tangent la (s) în punctul P, perpendicular pe $\vec{\tau}$ şi "ieşind" din S). Versorul normalei $\vec{N}$ la (s) în P este ales astfel încât $\vec{N} = N_e \times \vec{\tau}$. Această orientare pe bordul C poate fi prezentată sugestiv astfel: "un observator care parcurge C în sensul lui $\vec{\tau}$ şi având capul capul spre $\vec{N}$, are mâna stângă spre S".

Elementul de suprafaţă bordată poate fi dat cartezian (în raport cu xOy) prin

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y), (x,y) \in M\right\}, \tag{7.46}$$

unde $M \subset \Delta$ este un compact bordat iar $f \in C^2(\Delta)$. Similar se pot considera elemente de suprafaţă bordată date cartezian în raport cu yOz (prin ecuaţii de forma $x = f(y,z)$), sau în raport cu zOx (prin ecuaţii de forma $y = f(x,z)$). O porţiune de suprafaţă orientată S, de clasă C^2, se numeşte *elementară* dacă se poate descompune într-un număr finit de de elemente de suprafaţă bordată date cartezian în raport cu unul din planele de coordonate; două astfel de elemente nu pot avea în comun decât, cel mult, părţi ale bordurilor. In acest caz bordul orientat al porţiunii de suprafaţă elementară este juxtapunerea unor părţi ale bordurilor elementelor de suprafaţă bordată componente care aparţin exact unui singur bord (v. Fig. 7.5).

Teorema 7.7. (Formula lui Stokes) *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o porţiune de suprafaţă elementară, C bordul orientat, închis, al lui S şi $\vec{v}$ un câmp vectorial de* *clasă C^1 pe un deschis care conţine pe S. Atunci*

$$\int_C \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{N}\, d\sigma \tag{7.47}$$

Demonstraţie. Un raţionament similar cu cel făcut la teoremele 7.5 şi 7.6, bazat pe proprietăţile de aditivitate ale integralelor, arată că putem considera doar cazul când S este un element de suprafaţă bordată care admite reprezentarea (7.46).

Fie $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ şi notăm $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Deoarece $dz = pdx + qdy$ rezultă

$$\begin{aligned}\int_C \vec{v}\, d\vec{r} &= \oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \oint_C (P+Rp)dx + (Q+Rq)dy \\ &= \oint_{\operatorname{Fr} M} (P+Rp)dx + (Q+Rq)dy\end{aligned}$$

Aplicând acum formula (7.38), rezultă

$$\int_C \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_M \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q+Rq) - \frac{\partial}{\partial y}(P+Rp)\right] dxdy \tag{7.48}$$

Dacă notăm $\vec{A} = -p\vec{\imath} - q\vec{\jmath} + \vec{k}$, atunci se arată cu uşurinţă (şi propunem cititorului aceasta) că

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q+Rq) - \frac{\partial}{\partial y}(P+Rp) = \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} \tag{7.49}$$

şi din (7.48) şi (7.49) rezultă

$$\int_C \vec{v}\, d\vec{r} = (\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dxdy \tag{7.50}$$

Pe de altă parte, normala în punctul curent la S este

$$\vec{N} = \frac{-p\vec{\imath} - q\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

şi atunci membrul drept al formulei (7.47) este

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{N}\, d\sigma = \iint_M (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{N}) \sqrt{p^2+q^2+1}\, dxdy = \iint_M (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{A}) dxdy$$

care împreună cu (7.50) conduce la (7.47). □

Exemplul 7.20. Fie S : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \end{cases}$ şi $\vec{v}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$. Dacă C este bordul orientat al lui S, atunci

$$\int_C \vec{v}\,d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{N}\,d\sigma = 0$$

deoarece $\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{r^3} = 0$.

Exemplul 7.21. Fie $\vec{v} = xz\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} - z^2\vec{k}$ şi S : $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$. Dacă $\vec{N}$ este normala exterioară la S, atunci fluxul lui $\vec{v}$ prin S (după $\vec{N}$) este $\Phi = \iint_S \vec{v}\,\vec{N}\,d\sigma$.

Dacă observăm că $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$, unde $\vec{w} = \frac{1}{2}(yz^2\vec{\imath} - xz^2\vec{\jmath})$, rezultă

$$\Phi = \int_C \vec{w}\,d\vec{r} = -\frac{1}{2}\int_C yz^2dx - xz^2dy = \pi$$

deoarece C : $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=1 \end{cases}$, $0\leq t\leq 2\pi$.