# Capitolul 2

# Structuri topologige remarcabile

## 2.1 Spaţii metrice

Analiza matematică studiază structurile topologice, adică acele structuri care permit definirea noţiunii de limită. Am văzut că, pe dreapta reală, limita unui şir a putut fi definită după ce, în prealabil, s-a definit familia de vecinătăţi a fiecărui punct. Această familie (asociată fiecărui punct) are anumite proprietăţi, cum ar fi aceea că intersecţia a două vecinătăţi este tot o vecinătate a punctului respectiv. Definirea unei structuri topologice într-un spaţiu abstract se poate concepe în mai multe moduri (v. e.g. [16], [15]). Unul dintre acestea se bazează pe noţiunea de distanţă.

*Definiţie* Fie $E$ o mulţime nevidă. O funcţie $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe $E$ dacă verifică următoarele proprietăţi:

1. $d(x,y) \geq 0$, pentru orice $x, y \in E$, şi $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ pentru orice $x, y \in E$;
3. (*inegalitatea triunghiului*) pentru orice $x, y, z \in E$ avem

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Dubletul $(E, d)$ se numeşte *spaţiu metric.*
O mulţime de forma

$$B(x,r) = \{y \in E \mid d(y,x) < r\},\ x \in E,\ r > 0$$

se numeşte *bilă deschisă de centru $x$ şi rază $r$*, iar

$$B'(x,r) = \{y \in E \mid d(y,x) \leq r\},\ x \in E,\ r \geq 0$$

se numeşte *bilă închisă de centru $x$ şi rază $r$*.
Vecinătate a unui punct $x \in E$ este orice mulţime ce conţine o bilă deschisă de centru $x$.

**Exemplul 2.1.** 1. Fie $E \neq \emptyset$ o mulţime oarecare pe care definim distanţa:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y \end{cases}$$

iar un astfel de spaţiu metric se numeşte *discret.*
2. Se consideră $E = \mathbb{R}$ şi $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Bila deschisă $B(x, r)$ este intervalul deschis $(x - r, x + r)$ care induce topologia obişnuită de pe $\mathbb{R}$.
3. Se consideră $E = \mathbb{R}^d$ cu distanţa euclidiană, i. e. pentru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ şi $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ se pune

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2}. \tag{2.1}$$

Proprietăţile 1 şi 2 ale distanţei se verifică imediat, iar proprietatea 3 (inegalitatea triunghiului) i. e.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (z_k - y_k)^2}$$

revine la cunoscuta inegalitate Cauchy-Buniakovski. Intr-adevăr, dacă punem $a_k = x_k - z_k$, $b_k = z_k - y_k$ şi se ridică la pătrat, atunci se obţine inegalitatea echivalentă

$$\left(\sum_{k=1}^{d} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{d} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{d} b_k^2\right)$$

care este chiar inegalitatea amintită. Pentru a o demonstra se consideră funcţia de gradul II

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k=1}^{d} (a_k x + b_k)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{d} a_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{d} a_k b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{d} b_k^2\right) \end{aligned}$$

care este pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Inegalitatea dorită se obţine scriind că discriminantul lui $\phi$ este negativ.
4. Fie $A \neq \emptyset$ şi $E = \mathcal{M}(A)$ mulţimea funcţiilor mărginite $f\colon A \to \mathbb{R}$ (i.e. mulţimea $f(A)$ este mărginită sau echivalent, $(\exists)\, M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, $(\forall)\, x \in A$). Pentru orice $f, g \in E$ definim

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \tag{2.2}$$

Distanţa (*verificaţi că este distanţă !*) astfel definită se numeşte *distanţa convergenţei uniforme* (v. [12], [2]).
5. Fie $E = \mathbb{R}^2$ şi notăm cu $d$ distanţa euclidiană. Pentru $p, q \in E$ definim

$$d^*(p,q) = \begin{cases} d(p,O) + d(q,O) & \text{dacă } p \neq q \\ 0 & \text{dacă } p = q \end{cases}$$

unde $O = (0,0)$ este originea.
Acestă distanţă (*verificaţi !*) este numită *"distanţa oficiului poştal"*; pentru aceasta trebuie să ne imaginăm că o scrisoare, pentru a ajunge din $p$ în $q$, trece pe la oficiul pştal $O$, sau cenzura din $O$, funţie de privilegiile serviciilor secrete ([20]).

Convergenţa unui şir de puncte din spaţiul metric $(E, d)$ se defineşte similar cu convergenţa unui şir de puncte din $\mathbb{R}$, în cele trei variante echivalente (demonstraţia echivalenţei se face la fel ca şi în cazul şirurilor de numere reale).

*Definiţie.* Se spune că şirul $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ de puncte din $E$ este convergent către $x \in E$ dacă este verificată una dintre următoarele condiţii echivalente între ele:

a) (*definiţia cu vecinătăţi*) In orice vecinătate $V$ a punctului $X$ se găsesc toţi termenii şirului $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$, începând de la un anumit rang (sau echivalent, cu excepţia unui nuăr finit de termeni).

b) (*definiţia cu* $\epsilon$) Pentru orice $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon)$ astfel încât $d(x_n, x) < \epsilon$ oricare ar fi $n \geq N(\epsilon)$.

c) (*echivalare cu un şir numeric*)

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

Similar cu cazul real se defineşte şirul Cauchy.

*Definiţie.* Se spune că şirul $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ este *un şir Cauchy* dacă, pentru orice $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon)$ astfel încât $d(x_m, x_n) < \epsilon$ oricare ar fi $m, n \geq N(\epsilon)$ (sau echivalent, $d(x_{n+p}, x_n) < \epsilon$ oricare ar fi $n \geq N(\epsilon)$ şi $p \geq 1$).
Datorită inegalităţii

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x)$$

rezultă că orice şir convergent este şir Cauchy. Reciproca acestei afirmaţii nu este în general adevărată.
*Definiţie.* Spaţiul metric $(E, d)$ se numeşte *complet* dacă orice şir Cauchy este convergent.

**Teorema 2.1.** *Fie* $\boldsymbol{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_d^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ *un şir de puncte din* $\mathbb{R}^d$.

1. *Sirul* $(\boldsymbol{x}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *converge către* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *dacă şi numai dacă componentele sale, i.e.* $(x_j^n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, $j = 1, 2, \ldots, d$, *reprezintă şiruri convergente respectiv către* $x_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$.

2. *Sirul* $(\boldsymbol{x}_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *este Cauchy dacă şi numai dacă a componentele sale, i.e.* $(x_j^n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, $j = 1, 2, \ldots, d$, *sunt şiruri Cauchy.*

3. *Spaţiul metric* $\mathbb{R}^d$ *înzestrat cu metrica euclidiană (v.* (2.1)*) este complet.*

*Demonstraţie.* a) Presupunem că $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ şi fie $\epsilon > 0$. Rezultă că există un rang $N(\epsilon)$ astfel încât

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) < \epsilon,\ (\forall)\, n \geq N(\epsilon)$$

Prin urmare, din inegalităţile evidente (v. (2.1))

$$|x_j^n - x_j| \leq d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}),\ j = 1, 2, \ldots, d$$

deducem

$$|x_j^n - x_j| < \epsilon,\ j = 1, 2, \ldots, d$$

adică

$$x_j^n \to x_j,\ j = 1, 2, \ldots, d.$$

Reciproc, presupunem că

$$x_j^n \to x_j, (\forall)\, j = 1, 2, \ldots, d.$$

Atunci pentru $(\forall)\, \epsilon > 0$, există rangurile $N_1(\epsilon), N_2(\epsilon), \ldots, N_d(\epsilon)$ astfel încât

$$|x_j^n - x_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}},\ (\forall)\, n \geq N_j(\epsilon),\ j = 1, 2, \ldots, d$$

Dacă punem $N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon), \ldots, N_d(\epsilon)\}$, atunci, pentru $n \geq N(\epsilon)$, avem

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j^n - x_j)^2} \leq \sqrt{d \cdot \frac{\epsilon^2}{d}} = \epsilon$$

adică $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$.

b) Demonstraţia este similară cu cea de la a).

c) Este o consecină a punctelor a) şi b) precum şi a criteriului general al lui Cauchy pentru şiruri de numere reale. □

**Exemplul 2.2.** 1. Pe mulţimea numerelor complexe $\boldsymbol{C}$ se defineşte distanţa

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},\ z_1, z_2 \in \boldsymbol{C} \tag{2.3}$$

unde $a_i = \Re z_i, b_i = \Im z_i,\ i = 1, 2$. Acesta este un spaţiu metric complet, demonstraţia fiind aceeaşi ca şi pentru $\mathbb{R}^2$ ( se spune că spaţiile metrice $\boldsymbol{C}$ şi $\mathbb{R}^2$ sunt homeomorfe, v. secţiunea 2.3).
2. Orice spaţiu metric discret este complet deoarece un şir Cauchy este constant începând de la un anumit rang, deci convergent.
3. Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale considerăm distanţa indusă de pe $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$. Spaţiul metric obţinut nu este complet. Intr-adevăr, fie $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ un şir de numere raţionale convergent către $\sqrt{2}$. Acest şir este Cauchy în $\mathbb{R}$, deci şi în $\mathbb{Q}$. Dacă $\mathbb{Q}$ ar fi complet atunci ar rezulta că $x_n \to x$, cu $x \in \mathbb{Q}$, ceea ce este o contradicţie pentru că, limita fiind unică, ar antrena $x = \sqrt{2}$ adică $\sqrt{2}$ ar fi raţional.

**Observaţia 2.1.** Convergenţa în spaţiul $\mathcal{M}(A)$ este echivalentă cu convergenţa uniformă pe $A$, ceea ce justifică denumirea acestei distanţe.

**Teorema 2.2.** *Spaţiul $\mathcal{M}(A)$ este complet.*

*Demonstraţie.* Fie $(f_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ unşir Cauchy în $\mathcal{M}(A)$. Deoarece pentru orice $x \in A$, avem $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq d(f_{n+p}, f_n)$, (v. (2.2)), rezultă că şirul de numere reale $(f_n(x), n \in \mathbb{N}^*)$ este Cauchy, astfel că el va converge către un număr real care depinde de $x$, pe care îl notăm $f(x)$. In acest fel s-a definit o funcţie $f\colon A \to \mathbb{R}$. Mai întâi vom arăta că $f \in \mathcal{M}(A)$. Intr-adevăr, deoarece $(f_n)$ este Cauchy rezultă că există un rang $N$ astfel încât

$$d(f_{n+p}, f_n) = \sup_{x \in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < 1,\ (\forall)\, p \geq 1,\ (\forall)\, n \geq N.$$

Punând $n = N$ avem

$$|f_{N+p}(x) - f_N(x)| < 1,\ (\forall)\, x \in A, (\forall)\, p \geq 1.$$

Făcând $p \to \infty$ şi ţinând cont că $f_{N+p}(x) \to f(x)$, rezultă

$$|f(x) - f_N(x)| \leq 1,\ (\forall)\, x \in A$$

adică

$$|f(x)| \leq 1 + |f_N(x)|,\ (\forall)\, x \in A.$$

Deoarece $f_N$ este o funcţie mărginită, rezultă $f \in \mathcal{M}(A)$. Acum vom arăta că $f_n \to f$ în $\mathcal{M}(A)$. Intr-adevăr, deoarece şirul de funcţii este Cauchy, pentru orice $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon)$ astfel încât

$$d(f_{n+p}, f_n) = \sup_{x \in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ (\forall)\, p \geq 1,\ (\forall)\, n \geq N(\epsilon).$$

Aşadar

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ (\forall)\, x \in A, (\forall)\, p \geq 1,\ (\forall)\, n \geq N(\epsilon).$$

Făcând $p \to \infty$, obţinem

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2},\ (\forall)\, x \in A, (\forall)\, n \geq N(\epsilon)$$

astfel că

$$d(f_n, f) < \epsilon,\ (\forall)\, n \geq N(\epsilon).$$

□

**Corolarul 2.1.** *(*Criteriul lui Weierstrass.*) Fie* $(u_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ *un şir de funcţii reale definite pe* $A$. *Presupunem există o serie numerică convergentă* $\sum a_n$ *astfel încât (se spune că* seria de funcţii este dominată*)*

$$|u_n(x)| \leq a_n,\ (\forall)\, x \in A, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$$

*In aceste condiţii seria de funcţii* $\sum u_n$ *este uniform convergentă pe* $A$.

*Demonstraţie.* Din ipoteză rezultă imediat că $u_n \in \mathcal{M}(A)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, pentru orice $x \in A$ şi $n, p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \\ \cdots + |u_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$$

De aici se deduce cu uşurinţă că şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale al seriei de funcţii $\sum u_n$ este Cauchy în $\mathcal{M}(A)$, deci convergent. □

**Exerciţiul 2.1.** 1. Se consideră funcţia

$$\phi\colon \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dacă } x = \infty \\ -1 & \text{dacă } x = -\infty \end{cases}$$

Să se arate că $\overline{\mathbb{R}}$ este un spaţiu metric relativ la distanţa $d(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|,\ x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Să se arate că funcţia $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|,\ x, y \in \mathbb{R}$ este o distanţă pe $\mathbb{R}$ şi că în acest spaţiu metric, şirul $x_n = n,\ n \geq 1$ este Cauchy, dar nu convergent.
3. Să se arate că următoare serii de funcţii sunt uniform convergente pe mulţimile indicate:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{1+n^4x^2},\ x \in [0,\infty);$ $(b)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}},\ x \in \mathbb{R};$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2},\ x \in \mathbb{R};$ $(d)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}),\ x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right].$

## 2.2 Topologia unui spaţiu metric

A defini o topologie pe o mulţime înseamnă a defini pentru fiecare punct al mulţimii familia sa de vecinătăţi. Acest lucru, pentru un spaţiu metric, a fost făcut în secţiunea 2.1. In continuare vom arăta care sunt proprietăţile familiei de vecinătăţi a unui punct şi vom pune în evidenţă anumite tipuri de submulţimi remarcabile ale unui spaţiu metric $(E, d)$. Aceasta va permite studiul aprofundat al funcţiilor-proprietăţi locale, globale şi analiza trecerii la limită. Familia de vecinătăţi a punctului $x \in E$ va fi notată $\mathcal{V}(x)$.

**Teorema 2.3.** *(*proprietăţile vecinătăţilor*) Fie $x \in E$.*
*1) Pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$ avem $x \in V$;*
*2) Dacă $U \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \supset U$, atunci $V \in \mathcal{V}(x)$;*
*3) Dacă $U, V \in \mathcal{V}(x)$, atunci $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$. Această proprietate se extinde prin inducţie la un număr finit de vecinătăţi ale unui punct fixat;*
*4) Dacă $x, y \in E$, $x \neq y$, atunci există $U \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$.*

*Demonstraţie.* 1) şi 2) rezultă direct din definiţie. Trecem la proprietatea 3). Intrucât $U, V \in \mathcal{V}(x)$, rezultă că există $r_1, r_2 > 0$ astfel încât $B(x, r_1) \in U$, $B(x, r_2) \in V$. Deoarce $r = \max\{r_1, r_2\} > 0$, iar $B(x, r) \subset U \cap V$ vom avea $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.
Pentru a demonstra proprietatea 4), fie $r = \frac{1}{3}d(x, y)$. Evident $r > 0$ iar mulţimile $U = B(x, r)$ şi $V = B(y, r)$ sunt disjuncte şi reprezintă vecinătăţi ale lui $x$, respectiv $y$. $\square$

*Definiţie.* Fie $(E, d)$ un spaţiu metric.
1) O submulţime $G \subset E$ se numeşte *deschisă* (sau *un deschis* al lui $E$) dacă $G$ este vecinătate pentru toate punctele sale, i.e. $G \in \mathcal{V}(x)$ pentru orice $x \in E$, (sau echivalent, pentru orice $x \in E$ există $r > 0$ astfel încât $B(x, r) \subset G$).
2) O submulţime $F \subset E$ se numeşte *închisă* (sau *un închis* al lui $E$) dacă $F^c = E \setminus F$ este deschisă.

**Exemplul 2.3.** 1. Fie $E = \mathbb{R}$. Pentru $a < b$, intervalele $(-\infty, a)$, $(a, b)$, $(b, \infty)$ sunt mulţimi deschise; intervalele $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[b, \infty)$ sunt mulţimi închise; intervalele $[a, b)$, $(a, b]$ nu sunt nici deschise, nici închise. O mulţime formată dintr-un singur punct este închisă. Mulţimea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ este închisă, iar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nu este nici deschisă, nici închisă.
Se poate arăta că o mulţime deschisă este o reuniune finită sau numărabilă de de intervale deschise (teorema lui Lindelöf) ([15]).
2. In spaţiul $E = \mathbb{R}^2$ discul $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ ca şi exteriorul său $D^c = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > r^2\}$ sunt deschişi. Dreptunghiul $(a, b) \times (c, d)$ este un deschis, dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$ este un închis, în timp ce dreptunghiul $[a, b) \times [c, d)$ nu este nici deschis, nici închis.
3. Fie $(E, d)$ un spaţiu metric şi $F \subset E$ cu distanţa indusă. Spaţiul metric

$(F, d)$ se numeşte *subspaţiu* al lui $(E, d)$. O submulţime $A \subset F$ este deschisă în $F$ dacă şi numai dacă există un deschis $G$ în $E$ astfel încât $A = D \cap F$. Intr-adevăr, este suficient să observăm că, pentru orice $x \in E$ şi orice $r > 0$, avem

$$B_F(x, r) = B_E(x, r) \cap F \tag{2.4}$$

**Teorema 2.4.** *(*proprietăţile mulţimilor deschise*) Fie $(E, d)$ un spaţiu metric.*

1. *$E$ şi $\emptyset$ sunt deschise;*
2. *Orice bilă deschisă este mulţime deschisă;*
3. *Dacă $(G_i)_{i \in I}$ este o familie oarecare de mulţimi deschise, atunci mulţimea $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ este deschisă, (i.e. orice reuniune de mulţimi deschise este des-chisă);*
4. *Dacă $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sunt mulţimi deschise, atunci mulţimea $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ este deschisă, (i.e. o intersecţie finită de mulţimi deschise este deschisă);*

*Demonstraţie.* 1. Este evidentă.
2. Fie $y \in B(x, r)$, $x \in E$, $r > 0$, $y \neq x$. Notăm $r' = r - d(x, y) > 0$. Vom arăta că $B(y, r') \subset B(x, r)$ Intr-adevăr, dacă $z \in B(y, r')$, atunci $d(z, y) \leq r' = r - d(x, y) \Rightarrow d(z, x) \leq d(z, y) + d(x, y) = r \Rightarrow z \in B(x, r)$. Prin urmare $B(x, r)$ este o vecinătate a punctului arbitrar $y \in B(x, r)$.
3. Fie $x \in G \Rightarrow (\exists)\, i \in I$ astfel încât $x \in G_i$. Cum $G_i$ este vecinătate a lui $x$ (deoarece este deschisă) rezulă că şi $G \supset G_i$ este vecinătate a lui $x$.
4. Este o consecinţă a teoremei 2.3, pct.3. $\square$

**Teorema 2.5.** *(*proprietăţile mulţimilor închise*) Fie $(E, d)$ un spaţiu metric.*

1. *$E$ şi $\emptyset$ sunt închise;*
2. *Orice bilă închisă este mulţime închisă;*
3. *Dacă $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sunt mulţimi închise, atunci mulţimea $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ este închisă, (i.e. o reuniune finită de mulţimi închise este închisă);*
4. *Dacă $(F_i)_{i \in I}$ este o familie oarecare de mulţimi închise, atunci mulţimea $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ este închisă, (i.e. orice intersecţie de mulţimi închise este închisă);*

*Demonstraţie.* Punctele 1, 3 şi 4 sunt consecinţe ale teoremei 2.4 şi ale relaţilor lui de Morgan. Pentru a demonstra 3, se consideră bilă închisă $B'(x,r)$, $y \notin B'(x,r)$ şi $r' = d(x,y) - r > 0$. Apoi se arată cu uşurinţă că $B(y,r') \subset (B'(x,r))^c$, deci $(B'(x,r))^c$ este deschisă, etc. □

**Exemplul 2.4.** 1. Din egalităţile

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \; ; \; (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right], \; a < b$$

rezultă că o mulţime închisă poate fi o intersecţie (*dar nu finită !*) de mulţimi deschise, iar o mulţime deschisă poate fi o reuniune (*dar nu finită !*) de mulţimi închise. O intersecţie numărabilă de mulţimi deschise este numită *de tip* $G_\delta$, iar o reuniune numărabilă de mulţimi închise este numită *de tip* $F_\sigma$.
2. Se consideră $\mathbb{R}^2$ cu distanţa oficiului poştal prezentată într-un exemplu anterior. Pentru $p \neq O$ avem

$$B(p,r) = \left\{q \in \mathbb{R}^2 \mid d(p,O) + d(q,O) < r\right\}$$

astfel că

$$B(p,r) = \{p\} \text{ dacă } d(p,O) \geq r.$$

Prin urmare o mulţime formată dintr-un singur punct, diferit de origine, este deschisă şi, conform teoremei 2.4, pct.3, orice mulţime ce nu conţine originea este deschisă. In consecinţă, orice mulţime care conţine originea este închisă.

**Observaţia 2.2.** O mulţime poate fi deschisă, închisă, atât deschisă cât şi închisă, sau nici deschisă nici închisă.

*Definiţie.* 1. Un punct $a \in A$ se zice *interior lui* $A$ dacă $A$ este o vecinătate a sa (i.e. există $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$). Mulţimea punctelor interioare lui $A$ se numeşte *interiorul* lui $A$, notat $\operatorname{Int} A$ (sau $\mathring{A}$).
2. Un punct $a \in E$ se zice *aderent lui* $A$ dacă, pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$; mulţimea acestora se numeşte *aderenţa (închiderea) lui* $A$, notată $\bar{A}$.
Dacă $\bar{A} = E$, se spune că $A$ este *densă în* $E$. 3. Un punct $a \in E$ se zice *de acumulare pentru* $A$ dacă, orice vecinătate $V$ a punctului $a$ conţine puncte din $A$ diferite de $a$; observăm că precizarea "diferite de $a$" este superfluă dacă $a \notin A$. Este clar că orice punct de acumulare pentru $A$ este aderent lui $A$.
4. Mulţimea $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ se numeşte *frontiera lui* $A$.

Este evident că $\operatorname{Int} A \subset A \subset \bar{A}$, iar $\operatorname{Fr} A$ este mulţimea punctelor $x \in E$ cu proprietatea că orice bilă deschisă centrată în $x$ intersectează atât $A$ cât şi $A^c$.

**Exemplul 2.5.** 1. Fie $E = \mathbb{R}$ şi $A = [a,b)$, $a < b$. Avem $\operatorname{Int} A = (a,b)$, $\bar{A} = [a,b]$, $\operatorname{Fr} A = \{a,b\}$. De asemenea, $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (deci $\mathbb{Q}$ este densă

în $\mathbb{R}$) şi $\operatorname{Fr}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime mărginită, atunci numerele reale $\sup A$ şi $\inf A$ (sau $\max A$ şi $\min A$) aparţin aderenţei $\bar{A}$.
2. In $E = \mathbb{R}^2$ considerăm dreptunghiul $A = (a, b] \times (c, d]$, $a < b, c < d$. Avem $\operatorname{Int} A = (a, b) \times (c, d)$, $\bar{A} = [a, b] \times [c, d]$, $\operatorname{Fr} A =$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{a, b\}, c \leq y \leq d\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \{c, d\}, a \leq x \leq b\}$.

Principalele proprietăţi ale interiorului şi aderenţei sunt:

1. Avem $\operatorname{Int} A = \bigcup\limits_{D \subset A} D$ ($D$ deschis), deci $\operatorname{Int} A$ este deschisă;
2. Mulţimea $A$ este deschisă dacă şi numai dacă $A = \operatorname{Int} A$;
3. Avem $\bar{A} = \bigcap\limits_{F \supset A} F$ ($F$ închisă), deci $\bar{A}$ este închisă;
4. Mulţimea $A$ este închisă dacă şi numai dacă $A = \bar{A}$;
5. Punctul $x \in E$ este aderent mulţimii $A$ (i.e. $x \in \bar{A}$) dacă şi numai dacă există un şir $(x_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ de puncte din $A$ astfel încât $x_n \to x$;
6. Avem
   (a) $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$; $\bar{A} \subset \bar{B}$.
   (b) $\operatorname{Int}(A \cap B) = (\operatorname{Int} A) \cap (\operatorname{Int} B)$; $\operatorname{Int}(A \cup B) \supset (\operatorname{Int} A) \cup (\operatorname{Int} B)$.
   (c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
   (d) $(\bar{A})^c = \operatorname{Int}(A^c)$; $(\operatorname{Int} \mathrm{A})^c = \overline{(A^c)}$.

**Exerciţiul 2.2.** 1. Să se expliciteze bila $B(\infty, r)$, $r > 0$ în spaţiul metric de la Exc. 2.1, pct. 1.
2. Să se arate că un şir numeric este convergent relativ la distanţa de la exemplul 2.1, pct. 1, dacă şi numai dacă este convergent relativ la distanţa euclidiană. Se spune că cele două distanţe sunt echivalente.
Aceeşi chestiune pentru distanţa de la exemplul 2.1, pct. 2. 3. Care dintre mulţimile următoare sunt închise (deschise) ?

a) $A = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z - i| \leq 2\}$;

b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2, |z| < 1\}$;

c) $A = \{z \in \boldsymbol{C} \mid 1 < |z| < 2\}$;

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 1, x + y \geq -1, x \geq 0, y \geq 0\}$;

e) $A = \left\{\dfrac{2 + (-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

f) $A = \left\{ \dfrac{2 + (-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$.

Să se determine frontiera acestor mulţimi.

## 2.3 Funcţii continue

In această secţiune vom generaliza rezultatele cunoscute pentru aplicaţiile reale de variabilă reală privind continuitatea, la aplicaţii definite pe un spaţiu metric cu valori în alt spaţiu metric.

Fie $(E, d)$ şi $(F, d')$ două spaţii metrice, $A \subset E$, iar $f \colon A \to F$.

*Definiţie.* Se spune că funcţia $f$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă este verificată una dintre următoarele condiţii echivalente între ele:

1. (*definiţia cu vecinătăţi*) Pentru orice vecinătate $V$ a punctului $f(a)$ există o vecinătate $U$ a punctului $a$ astfel încât $f(U \cap A) \subset V$ (i.e. pentru orice $x \in U \cap A$ avem $f(x) \in V$);
2. (*definiţia cu $\epsilon$ şi $\delta$*) Oricare ar fi $\epsilon > 0$ există $\delta(\epsilon) > 0$ (deci $\delta$ depinde de $\epsilon$) astfel încât $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$, pentru orice $x \in A$ cu $d(x, a) < \delta$;
3. (*definiţia cu şiruri*) Pentru orice şir $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ de puncte din $A$, $x_n \to a$ avem $f(x_n) \to f(a)$.

Observăm că $f$ este continuă în orice punct izolat al mulţimii $A$ (i.e. un punct al mulţimii $A$ care nu este punct de acumulare pentru $A$).
Dacă $f \colon E \to F$ este continuă în orice punct $a \in A \subset E$ se spune că este *continuă pe* $A$; dacă $f$ este continuă în orice punct din $E$ se spune simplu că este continuă.
In ceea ce priveşte operaţiile cu funcţii continue se demonstrează cu uşurinţă următoarele rezultate ([13], [17]):

1. Fie $E, F, G$ trei spaţii metrice, $A \subset E$ şi $f \colon A \to F$, $g \colon F \to G$. Dacă $f$ este continuă în punctul $a \in A$ iar $g$ în punctul $f(a) \in F$, atunci $g \circ f$ este continuă în punctul $a \in A$.
2. Dacă $f \colon A \to F$ este continuă în punctul $a \in A$, atunci $\lambda f$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ şi $|f|$ sunt continue în acelaşi punct.
3. Dacă $f, g \colon A \to F$ sunt continue în punctul $a \in A$, atunci următoarele funcţii sunt continue în acelaşi punct:
   $f + g$, $f - g$, $fg$, $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.
4. Fie $(E, d)$ un spaţiu metric, $A \subset E$ şi $f \colon A \to \mathbb{R}^d$. Funcţia $f$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă toate componenetele ei $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$, $j = 1, 2, \ldots, d$ ($\mathrm{pr}_j \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sunt proiecţiile canonice, i.e. $\mathrm{pr}_j(x_1, x_2, \ldots, x_d) = x_j$) sunt continue în acelaşi punct.

5. Fie $(E, d)$ un spaţiu metric, $A \subset E$ şi $f : A \to \boldsymbol{C}$. Funcţia $f$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă funcţiile reale $\Re f$ şi $\Im f$ (i.e. partea reală şi partea imaginară a funcţiei $f$) sunt continue în acelaşi punct.

**Teorema 2.6.** *Fie $E$ şi $F$ două spaţii metrice, iar $f : E \to F$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*a) $f$ este continuă;*

*b) pentru orice $A \subset E$ avem $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$;*

*c) dacă $A$ este închisă în $F$, atunci $f^{-1}(A)$ este închisă în $E$ (se spune că $f$ "întoarce" închişi în închişi);*

*d) dacă $G$ este deschisă în $F$, atunci $f^{-1}(G)$ este deschisă în $E$ (se spune că $f$ "întoarce" deschişi în deschişi).*

*Demonstraţie.* a)$\Rightarrow$ b) Fie $a \in \bar{A}$ arbitrar. Dacă $V$ este o vecinătate a punctului $b = f(a)$, datorită continuităţii, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U) \subset V$. Cum $a \in \bar{A}$ rezultă că $U \cap A \neq \emptyset$, ceea ce antrenează $f(U \cap A) \neq \emptyset$, deci $f(U) \cap f(A) \neq \emptyset$ şi în final $V \cap f(A) \neq \emptyset$.
b)$\Rightarrow$ c) Avem $A = \bar{A}$ şi aplicând b), rezultă

$$f(\overline{f^{-1}(A)}) \subset \overline{f(f^{-1}(A))} \subset \bar{A} = A \Rightarrow \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(A)$$

şi, cum incluziunea inversă este evidentă, rezultă că $f^{-1}(A)$ este închisă.
c)$\Rightarrow$ d) Luăm $A = G^c$ deci $A$ este închisă şi, conform c), $f^{-1}(A) = f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ va fi închisă deci $f^{-1}(G)$ deschisă.
d)$\Rightarrow$ a) Fie $a \in E$ arbitrar, $b = f(a)$ şi $V$ o vecinătate a punctului $b$. Există $r > 0$ astfel încât $A = B(b, r) \subset V$. Deoarece $U$ este un deschis ce conţine $a$, rezultă $U \in \mathcal{V}(a)$ şi evident $f(U) \subset A \subset V$ ceea ce arată că $f$ este continuă în punctul $a$. $\square$

**Observaţia 2.3.** Fie $(E, d)$ şi $(F, d')$ două spaţii metrice. O aplicaţie $h : E \to F$ se numeşte *homeomorfism* dacă: a) $h$ este bijectivă; b) $h$ este continuă; c) $h^{-1}$ este continuă. In acest caz cele două spaţii metrice se numesc *homeomorfe*. Se observă cu uşurinţă că un şir $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ de puncte din $E$ este convergent şi are limita $x$ dacă şi numai dacă şirul corespunzător $(h(x_n), n \in \mathbb{N}^*)$ este covergent şi are limita $h(x)$. Intrucât proprietăţile topologice sunt invariante la homeomorfisme se spune că două spaţii metrice homeomorfe nu diferă din punct de vedere topologic.

*Definiţie.* Fie $(E, d)$ şi $(F, d')$ două spaţii metrice, $A \subset E$, iar $f : E \to F$. Dacă $a$ este un punct de acumulare al mulţimii $A$, atunci se spune că $f$ *admite limita* $\ell$ ($\ell \in F$) în punctul $a$ (prin mulţimea $A$) şi se scrie

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$$

dacă funcţia $\tilde{f}\colon A \cup \{a\} \to F$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \setminus \{a\} \\ \ell & \text{dacă } x = a \end{cases}$$

este continuă în punctul $a$.
Definiţia de mai sus este echivalentă cu oricare dintre următoarele condiţii echivalente între ele:

1. (*definiţia cu vecinătăţi*) oricare ar fi vecinătatea $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap (A \setminus \{a\})) \subset V$ (i.e. pentru orice $x \in U \cap A, x \neq a$, avem $f(x) \in V$);

2. (*definiţia cu* $\varepsilon$ *şi* $\delta$) oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in A, x \neq a, d(x,a) < \delta(\varepsilon) > 0$ avem $d'(f(x), \ell) < \varepsilon$;

3. (*definiţia cu şiruri*) pentru orice şir $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ de puncte din $A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ (în $E$) avem $f(x_n) \to \ell$ (în $F$).

**Observaţia 2.4.** Dacă $f\colon A \subset E \to F$ iar $a \in A$ este un punct de acumulare al lui $A$, atunci $f$ este continuă în punctul $a$ dacă şi numai dacă

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$$

**Exemplul 2.6.** 1. Vom arăta că funcţia

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă în origine. Intr-adevăr, pentru $(x,y) \neq (0,0)$ avem

$$|f(x,y) - f(0,0)| \le \frac{|x|}{x^2+y^2} \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} = d((x,y),(0,0))$$

unde $d$ este distanţa euclidiană din $\mathbb{R}^2$. Astfel, pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate lua $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, pentru ca $d((x,y),(0,0))$ să antreneze $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$, ceea ce arată că $f$ este continuă în origine.
2. Fie $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Limita

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)$$

nu există deoarece luând şirul $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right) \to (0,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, avem

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) \text{ depinde de } \lambda.$$

3. Fie $E = \mathbb{R}^d, A \subset E$, $f\colon A \to F$. Dacă $a = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in E$ este un punct de acumulare pentru $A$ iar $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_d)$ un vector nenul din $E$ se poate defini *limita lui $f$ în punctul $a$, după direcţia lui $\boldsymbol{s}$* ca fiind

$$\lim_{t\to 0} f(a + t\boldsymbol{s}) = \lim_{t\to 0} f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, \ldots, a_d + ts_d).$$

Denumirea se justifică prin faptul că vectorul $x = a + t\boldsymbol{s}$ are proprietatea că $x - a$ este colinear cu $\boldsymbol{s}$. Dacă există $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, atunci există şi limita lui $f$ după orice direcţie. Reciproca nu este adevărată (v. exemplul următor).
4. Se consideră funcţia

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Dacă $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)$ este un vector oarecare atunci

$$\lim_{t\to 0} f(ts_1, ts_2) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } s_1 \neq s_2 \\ 1 & \text{dacă } s_1 = s_2 \end{cases}$$

Prin urmare $f$ are limită în origine după orice direcţie. Pe de altă parte limita

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^2}\right) = \frac{1}{1+\lambda^2},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

depinde de $\lambda$ astfel că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

**Observaţia 2.5.** Dacă $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ este un şir convergent către zero, iar

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, \lambda x_n)$$

nu depinde de $\lambda$ nu se poate trage concluzia că funcţia are limită în origine.

Din "definiţia cu $\varepsilon$ şi $\delta$" a continuităţii unei funcţii într-un punct $a$ se observă că $\delta(\varepsilon)$ depinde în general şi de punctul $a$, adică ar trebui scris $\delta(\varepsilon, a)$. Inlăturarea acestei dependenţe conduce către definiţia următoare.

*Definiţie.* Fie $(E,d)$ şi $(F,d')$ două spaţii metrice, $A \subset E$, iar $f\colon A \to F$. Se spune că $f$ este *uniform continuă pe $A$* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice $x_1, x_2 \in A$ cu $d(x_1,x_2) < \delta(\varepsilon)$, avem $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.
Este evident că o funcţie uniform continuă pe $A$ este continuă pe $A$, reciproca nefiind adevărată în general.

*Definiţie.* Fie $(E,d)$ un spaţiu metric. O aplicaţie $\phi\colon E \to E$ este numită *contracţie pe $E$* dacă există $0 \leq k < 1$ astfel încât $d(\phi(x), \phi(y)) \leq k\, d(x,y)$, pentru orice $x, y \in E$.
Este evident că o contracţie este uniform continuă pe $E$, deci continuă. Un rezultat important este dat de următoarea teoremă (numită *principiul contracţiei* sau *teorema de punct fix*) datorată matematicianului polonez St. Banach.

**Teorema 2.7.** *Dacă $\phi$ este o contracţie pe spaţiul metric complet $E$, atunci există şi este unic un punct $\xi \in E$ astfel încât $\phi(\xi) = \xi$.*

*Demonstraţie.* Arătăm unicitatea. Dacă avem $\phi(\xi) = \xi$ şi $\phi(\xi') = \xi'$, atunci $d(\xi, \xi') = d(\phi(\xi), \phi(\xi')) \leq k\, d(\xi, \xi')$ care antrenează $d(\xi, \xi') = 0$ adică $\xi = \xi'$. Pentru a arăta existenţa fixăm $x_0 \in E$. Dacă $d(x_0, x_1) = 0$, atunci $\xi = x_0$. Dacă nu, notăm $\delta = d(x_0, x_1) > 0$ şi construim prin recurenţă şirul

$$x_1 = \phi(x_0),\ x_2 = \phi(x_1), \ldots, x_n = \phi(x_{n-1}), \ldots$$

Avem

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\phi(x_n), \phi(x_{n+1})) \leq k\, d(x_{n-1}, x_n) \leq k^2\, d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \\ \cdots \leq k^n\, d(x_0, x_1) = k^n \delta,\ n \in \mathbb{N}$$

Rezulă

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ \delta(k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}) = k^n \delta \frac{1 - k^p}{1 - k} \leq k^n \frac{\delta}{1 - k}$$

Deoarece $k^n \to 0$ rezultă că $(x_n, n \in \mathbb{N})$ este un şir Cauchy, deci convergent şi fie $\xi$ limita sa. Cum $\phi$ este continuă rezultă $\phi(x_n) \to \phi(\xi)$, adică $x_{n+1} \to \phi(\xi)$ şi din unicitatea limitei $\phi(\xi) = \xi$. $\square$

**Exemplul 2.7.** 1. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Vom arăta că $f$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Intr-adevăr, din

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\sin \frac{x_1 - (x_2}{2}\right|\left|\cos \frac{x_1 + (x_2}{2}\right| \leq |x_1 - x_2|$$

rezultă $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.
2. Pentru a arăta că o funcţie $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu este uniform continuă pe $A$ se caută două şiruri $(x_n)$ şi $(y_n)$ de puncte din $A$ cu proprietatea $x_n - y_n \to 0$, dar pentru care există $\varepsilon > 0$ astfel încât $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$. Astfel pentru $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ putem lua $x_n = \dfrac{1}{n}, y_n = \dfrac{2}{n}$ şi $\varepsilon = \ln 2$, ceea ce arată că $f$, deşi continuă, nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$.

**Exerciţiul 2.3.** 1. Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x^3}{x^2 + x^2} & \text{pentru } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pentru } (x, y) = (0, 0) \end{cases};$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} x & \text{pentru } xy \geq 0 \\ y & \text{pentru } xy < 0 \end{cases};$

c) $f\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C},\ f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{pentru } z \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } z = 0 \end{cases}$

2. Fie $(E, d)$ un spaţiu metric şi $f\colon E \to E$ cu proprietatea că există $x_0 \in E$ astfel încât $d(f(x), x) \leq d(x, x_0)$, $(\forall)\, x \in E$. Să se arate că $f(x_0) = x_0$ şi că $f$ este continuă în $x_0$.

## 2.4 Mulţimi compacte

Fie $(E, d)$ un spaţiu metric şi $K \subset E$.
*Definiţie.*

1. Mulţime $K$ se zice *mărginită* dacă este conţinută într-o bilă deschisă;
2. O familie $(G_i, i \in I)$ de submulţimi ale lui $E$ se numeşte *acoperire a lui* $K$ dacă $\bigcup_{i \in I} G_i \supset K$;
3. O subfamilie $(G_i, i \in J)$, $J \subset I$ care formează o acoperire a lui $K$ este numită *subacoperire a lui* $K$;
4. Mulţimea $K$ se numeşte *compactă* (sau *un compact*) dacă din orice acoperire a sa cu mulţimi deschise se poate extrage o subacoperire finită. Cu alte cuvinte, dacă familia de mulţimi deschise $(G_i, i \in I)$ are proprietatea $\bigcup_{i \in I} G_i \supset K$, atunci există mulţimea finită $J \subset I$ astfel încât $\bigcup_{i \in J} G_i \supset K$.

Deşi noţiunea de mulţime compactă este fundamentală, definiţia precedentă nu permite formarea unei imagini intuitive a unei astfel de mulţimi. In continuare vom trece în revistă proprietăţile principale ale mulţimilor compacte, ceea ce va permite familiarizarea cititorului cu aceste mulţimi remarcabile.

1. O mulţime compactă este închisă şi mărginită;
2. Dacă spaţiul metric $E$ este compact iar $K \subset E$ este închisă, atunci $K$ este compactă (se spune "un închis într-un compact este compact");
3. Mulţimea $K \subset E$ este compactă dacă şi numai dacă orice şir de puncte din $K$ conţine un subşir convergent a cărui limită se găseşte în $K$;
4. In cazul particular $E = \mathbb{R}^d$, o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

Proprietatea 4 de mai sus ajută, în cazul spaţiului $\mathbb{R}^d$, la formarea unei imagini intuitive a noţiunii de mulţime compactă, ceea ce permite recunoaşterea şi operarea cu aceste mulţimi .

**Exemplul 2.8.** 1. In orice spaţiu metric o mulţime finită este compactă aşa după cum rezultă din definiţie.
2. In $\mathbb{R}^3$ sfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ şi elipsoidul (împreună cu "coaja" sa) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ sunt compacte (cf. prop. 4).
3. In $\mathbb{R}^2$ mulţimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ nu este compactă (deşi este închisă, nu este mărginită, v. prop. 4).

Funcţiile continue definite pe mulţimi compacte au unele proprietăţi importante, puse în evidenţă de teorema următoare.

**Teorema 2.8.** *Fie $(E, d)$ şi $(F, d')$ două spaţii metrice.*

1. *Dacă $f\colon E \to F$ este continuă şi $K \subset E$ este compactă, atunci $f(K)$ este compactă (*o funcţie continuă duce compact în compact*).*

2. *Dacă $f\colon K \subset E \to F$ este continuă şi $K \subset E$ este compactă, atunci $f$ este uniform continuă (*o funcţie continuă pe un compact este uniform continuă*).*

3. *Dacă $f\colon K \subset E \to \mathbb{R}$ este continuă şi $K \subset E$ este compactă, atunci există $\alpha, \beta \in E$ astfel încât*

$$f(\alpha) = \min_{x \in K} f(x); \; f(\beta) = \max_{x \in K} f(x)$$

*Se spune că* o funcţie continuă pe un compact este mărginită şi îşi atinge marginile.

*Demonstraţie.* 1. Fie $(G_i, i \in I)$ o acoperire cu deschişi a mulţimii $f(K)$. Conform teoremei 2.8, pct. d), familia $(G'_i = f^{-1}(G_i), i \in I)$ formează o acoperire cu deschişi a mulţimii $K$. Deoarece $K$ este compactă, există o subacoperire finită $(G_i, i \in J)$ a lui $K$, deci şi o subacoperire finită $(G'_i, i \in J)$ a lui $f(K)$.

2. Fie $\varepsilon > 0$ şi $a \in K$ arbitrar. Din continuitatea lui $f$ rezultă existenţa unui $\delta(\varepsilon, a) > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in K$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon, a)$ avem $d'(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece familia de bile deschise $\left(B\left(a, \frac{\delta(\varepsilon, a)}{2}\right), a \in K\right)$ formează o acoperire cu deschişi (v. teorema 2.4, pct. 2) a lui $K$, iar $K$ este compactă, rezultă existenţa unui număr finit de puncte $a_1, a_2 \ldots, a_p \in K$ astfel încât

$$K \subset B\left(a_1, \frac{\delta(\varepsilon, a_1)}{2}\right) \cup B\left(a_2, \frac{\delta(\varepsilon, a_2)}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(a_p, \frac{\delta(\varepsilon, a_p)}{2}\right).$$

Punem $\delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{2} \min(\delta(\varepsilon, a_1), \ldots, \delta(\varepsilon, a_p)) > 0$ *(inegalitatea strictă este esnţială !)* şi fie $x, y \in K$ cu $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$. Există $1 \leq i \leq p$, astfel încât $x \in B\left(a_i, \dfrac{\delta(\varepsilon, a_i}{2}\right)$ ceea ce antrenează $d'(f(x), f(a_i)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pe de altă parte $d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < \delta + \dfrac{\delta(\varepsilon, a_i)}{2} \leq \delta(\varepsilon, a_i)$ antrenează $d'(f(y), f(a_i)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, astfel că în final avem

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(a_i)) + d'(f(y), f(a_i)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

deci $f$ este uniform continuă pe $K$.

3. Conform cu pct. 1, $f(K)$ este compactă, deci închisă şi mărginită. Cum numerele reale $\inf\limits_{x \in K} f(x)$ şi $\sup\limits_{x \in K} f(x)$ aparţin lui $\overline{f(K)}$, ele vor aparţine lui $f(K)$, deoarece $\overline{f(K)} = f(K)$.

□

**Exerciţiul 2.4.** 1. Să se precizeze care dintre mulţimile de la exerciţiul 2.2, pct. 3 sunt compacte.
2. Să se arate că $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, deşi continuă, nu este mărginită.
3. Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ înzestrată cu metrica de la exerciţiul 2.2, pct. 3, este un spaţiu metric compact.
4. Fie $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continuă. Presupunem că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ există şi este finită. Să se arate că $f$ este mărginită.
5. Fie $f\colon E \to F$ o aplicaţie continuă şi bijectivă între spaţii metrice. Să se arate că dacă $E$ este compact, atunci $f$ este un homeomorfism.

## 2.5 Mulţimi conexe

Ideea intuitivă de mulţime conexă este aceea a unei mulţimi "dintr-o bucată", adică care nu este formată din două sau mai multe părţi "separate" între ele. Această idee este exprimată matematic de următoarea definiţie.

*Definiţie.* Fie $(E, d)$ un spaţiu metric. Submulţimea $A \subset E$ se numeşte *conexă* dacă nu există două mulţimi deschise $D_1, D_2 \subset E$ cu următoarele proprietăţi:

a) $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$, $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$;

b) $D_1 \cap A \neq \emptyset$, $D_2 \cap A \neq \emptyset$;

c) $A \subset D_1 \cup D_2$.

Această definiţie transpusă pentru întregul spaţiu $E$ devine: *spaţiul metric $E$ este conex dacă nu exisă două submulţimi deschise şi nevide $D_1$ şi $D_2$ astfel încât $D_1 \cup D_2 = E$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, i.e. orice submulţime nevidă simultan închisă şi deschisă coincide cu $E$.*

**Teorema 2.9.** *Dacă $A \subset E$ este conexă, atunci orice submulţime $B \subset E$ cu proprietatea $A \subset B \subset \bar{A}$ este de asemenea conexă.*

*Demonstraţie.* Presupunem prin absurd că $B$ nu este conexă. Prin urmare există $D_1$ şi $D_2$ nevide astfel încât

- $D_1 \cap D_2 \cap B = \emptyset \Rightarrow D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$;
- $D_1 \cap B \neq \emptyset$, $D_2 \cap B \neq \emptyset$;
- $B \subset D_1 \cup D_2 \Rightarrow A \subset D_1 \cup D_2$.

In plus, cum $D_1 \cap B \neq \emptyset$, există $x \in D_1 \cap B$ care este punct aderent al lui $A$ şi, deoarece $D_1$ (deschisă) este o vecinătate a sa, rezultă $D_1 \cap A \neq \emptyset$; analog $D_2 \cap A \neq \emptyset$. Toate acestea arată că $A$ nu este conexă, contradicţie. □

**Corolarul 2.2.** *Dacă $A$ este conexă, atunci $\bar{A}$ este conexă.*

**Observaţia 2.6.**

1. Se demonstrează că o submulţime $I \subset \mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă $I$ este interval (indiferent de formă).

2. Dacă $a, b \in \mathbb{R}^d$ se defineşte segmentul $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$. O mulţime deschisă $G \subset \mathbb{R}^d$ este conexă dacă şi numai dacă, pentru orice $a, b \in G$, există o linie poligonală, care uneşte pe $a$ cu $b$ şi care este conţinută în $G$, i.e. există $a_1, a_2 \ldots, a_p \in G$ astfel încât $[a, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_p, b] \subset G$.

**Teorema 2.10.** *Fie $f\colon E \to F$ o aplicaţie continuă între spaţii metrice şi $G \subset E$ conexă. Atunci $f(G)$ este conexă. Se spune că* o funcţie continuă "duce conex în conex".

*Demonstraţie.* Dacă punem $G' = f(G)$ se pot considera subspaţiile $G$ şi $G'$ (v. exemplul 2.8, pct. 3) iar $f\colon G \to G'$. Aşadar vom presupune de la început că $E$ este conex iar $f$ surjectivă. Dacă $F = f(E)$ ar fi neconexă, atunci ar exista $D_1', D_2' \subset F$ deschise şi nevide astfel încât $D_1' \cup D_2' = F$, $D_1' \cap D_2' = \emptyset$. Atunci $D_1 = f^{-1}(D_1')$, $D_2 = f^{-1}(D_2')$ ar fi de asemenea deschise (v. teorema 2.8, pct. d)), nevide (deoarece $f$ este surjectivă), $E = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, adică $E$ ar fi neconex, contradicţie. □

**Corolarul 2.3.** *(*Darboux*) Fie $f\colon E \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă. Dacă $E$ este conex şi există $a, b \in E$ astfel încât $f(a)\, f(b) < 0$, atunci există $\xi \in E$ cu proprietatea $f(\xi) = 0$.*

*Demonstraţie.* Mulţimea $f(E) \subset \mathbb{R}$ este conexă, deci este un interval ce conţine intervalul $[f(a), f(b)] \ni 0$, deci $0 \in f(E)$. □

## 2.6 Spaţii vectoriale normate (SVN)

Fie $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

*Definiţie.* O funcţie $\| \, \| : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ se numeşte *normă* pe $\mathbf{V}$ dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. $\|x\| \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{V}$
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $(\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbf{V}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)\, x, y \in \mathbf{V}$,(*inegalitatea triunghiului*).

Dubletul $(\mathbf{V}, \| \, \|)$ este numit *spaţiu vectorial normat.*

**Exemplul 2.9.** 1. $\mathbf{V} = \mathbb{R}$, $|x|$ este normă pe $\mathbb{R}$
2. Fie $\mathbf{V} = \mathbb{R}^d$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots x_d) \in \mathbb{R}$. Definim trei norme *(de ce sunt norme?)*

- $\|x\|_e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$
- $\|x\|_a = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d|$
- $\|x\|_m = \max\limits_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

3. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Mulţimea $\mathcal{M}(A) = \{f \colon A \to \mathbb{R} \mid f \text{ este mărginită}\}$, înzestrată cu operaţiile uzuale cu funcţii, este un spaţiu vectorial (*demonstraţi!*). Definim norma (*verificaţi!*, v. exemplul 2.1, pct. 4)

$$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|, \; f \in \mathcal{M}(A) \tag{2.5}$$

**Exerciţiul 2.5.** Să se arate că cele trei norme definite pe $\mathbb{R}^d$ verifică inegalităţile:

$$\| \, \|_e \leq \| \, \|_a \leq \sqrt{d} \, \| \, \|_e \, ; \; \frac{1}{d} \| \, \|_e \leq \| \, \|_m \leq \| \, \|_e \tag{2.6}$$

Considerând distanţa $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbf{V}$, *(dovediţi că este distanţă!)*, orice SVN $(\mathbf{V}, \| \, \|)$ este spaţiu metric. Prin urmare, se poate spune că un SVN este un caz particular de spaţiu metric.

Fie $(x_n)_{n \in N^*}$ un şir de elemente din SVN-ul $(\mathbf{V}, \| \, \|)$. Faptul că acest şir este convergent şi are limita $x \in \mathbf{V}$, $(\lim_{n \to \infty} x_n = x)$, se defineşte într-unul din următoarele trei moduri echivalente:

1. *(definiţia cu vecinătăţi)* In orice vecinătate a lui $x$ se găsesc toţi termenii şirului începând de la un anumit rang (i.e. cu excepţia unui număr finit de termeni).

2. *(definiţia cu $\varepsilon$)* $(\forall)\,\varepsilon > 0, (\exists)$ un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $\|x_n - x\| < \varepsilon$, $(\forall)\, n \geq N(\varepsilon)$.

3. *(translaţia în origine)* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Sirul Cauchy se defineşte la fel ca pentru spaţii metrice.

*Definiţie.* Sirul $(x_n)_{n\in N^*}$ de elemente din $\mathbf{V}$ este numit *şir Cauchy* dacă este verificată una din următoarele condiţii echivalente între ele:

1. $(\forall)\,\varepsilon > 0, (\exists)$ un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, $(\forall)\, m, n \geq N(\varepsilon)$.

2. $(\forall)\,\varepsilon > 0, (\exists)$ un rang $N(\varepsilon)$astfel încât $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$, $(\forall)\, n \geq N(\varepsilon)$ şi $(\forall)\, p \in \mathbb{N}^*$.

După cum am văzut în sec 2.1 un şir convergent este şir Cauchy, reciproca nefiind, în general, adevărată. Un spaţiu vectorial normat complet este numit *spaţiu Banach*.

**Observaţia 2.7.** Criteriul general al lui Cauchy pentru şiruri din $\mathbb{R}^d$ (v. teorema 2.1) arată că $\mathbb{R}^d$ este un spaţiu Banach.

**Observaţia 2.8.** Fie $(f_n,\, n \in \mathbb{N}^*)$ un şir de funcţii din spaţiul $\mathcal{M}(A)$. Faptul că acest şir converge către $f \in \mathcal{M}(A)$ înseamnă:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \tag{2.7}$$

Prin urmare este vorba de uniform convergenţa (UC) pe $A$ (v. obs. 2.1).
In plus, conform teoremei 2.2, $\mathcal{M}(A)$ este un spaţiu Banach.

**Exerciţiul 2.6.** Prin analogie cu seriile de numere reale, să se definească noţiunea de serie într-un spaţiu Banach, natura unei astfel de serii, criteriul general al lui Cauchy. Dacă în spaţiul vectorial $\mathbf{V}$ au fost definite două norme $\|\;\|_1$ şi $\|\;\|_2$,
atunci pe $\mathbf{V}$ vor exista două structuri topologice.

*Definiţie* Normele $\|\;\|_1$ şi $\|\;\|_2$ se numesc echivalente dacă există $\alpha, \beta \geq 0$ astfel încât

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1\,,\; (\forall)\, x \in \mathbf{V}. \tag{2.8}$$

In acest caz, cele două norme definesc aceeaşi structură topologică, i.e.

$$x_n \xrightarrow{\|\;\|_1} x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{\|\;\|_2} x \tag{2.9}$$

**Exerciţiul 2.7.** Să se arate că cele trei norme introduse pe $\mathbb{R}^d$ sunt echivalente.

Dacă $(\mathbf{V}_1, \|\;\|_1)$ şi $(\mathbf{V}_2, \|\;\|_2)$ sunt două SVN-uri, atunci o funcţie $f : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ este numită funcţie vectorială de variabilă vectorială (putem avea funcţie reală de variabilă vectorială sau funcţie vectorială de de variabilă reală).

Continuitatea funcţiilor se tratează de o manieră evidentă, deoarece subiectul a fost abordat pentru spaţii metrice. De exemplu, fie $(\mathbf{V}_1, \| \|_1)$ şi $(\mathbf{V}_2, \| \|_2)$ două SVN-uri, $A \subset \boldsymbol{V}_1$ şi $f\colon A \to \mathbf{V}_2$ . Funcţia $f$ este continuă în punctul $x_0 \in A$, dacă este verificată una dintre următoarele trei condiţii echivalente între ele:

1. *(definiţia cu vecinătăţi)* Pentru orice vecinătate $V(\subset \mathbf{V}_2)$ a punctului $f(x_0) \in \mathbf{V}_2$, există o vecinătate $U(\subset \mathbf{V}_1)$ a punctului $x_0$ astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \bigcap A$.

2. *(definiţia cu $\varepsilon$ şi $\delta$)* $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\|f(x) - f(x_0\|_2 < \varepsilon$, $(\forall)\, x \in A$, cu proprietatea $\|x - x_0\|_1 < \delta(\varepsilon)$.

3. *(definiţia cu şiruri)* Pentru orice şir $(x_n)_{n \in N^*}$ de elemente din $A$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Uniform continuitatea se defineşte de aceaşi manieră ca pentru spaţii metrice.

*Definiţie.* Funcţia $f\colon A \subset \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ este *uniform continuă pe A* dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, ori de câte ori $x_1, x_2 \in A$ şi $\|x_1 - x_2\|_1 < \delta(\varepsilon)$ avem $\|f(x_1) - f(x_2\|_2 < \varepsilon$.

**Exemplul 2.10.** 1. Fie

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vom arăta că această funcţie este continuă în origine prin două metode.

*Metoda I (cu $\varepsilon$ şi $\delta$)* Fie $\varepsilon > 0$. Utilizând inegalitatea $|xy| \le x^2 + y^2$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| \le \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2 + y^2 = \\ \|(x,y)\| = \|(x,y) - (0,0)\| \end{aligned} \tag{2.10}$$

Prin urmare, luând $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ şi folosind (2.10) rezultă

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că funcţia $f$ este continuă în origine.

*Metoda II (cu şiruri)* Fie $((x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}^*)$ un şir arbitrar din $\mathbb{R}^2$, astfel încât $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$. La fel ca în (2.10) deducem că $|f(x_n, y_n)| \le x_n^2 + y_n^2 \to 0$, conform rezultatelor referitoare la operaţii cu şiruri convergente. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$.

2. Fie

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vom arăta că această funcţie nu are limită în origine. Pentru aceasta vom considera un şir $(x_n, y_n)$ unde $y_n = \lambda x_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, fiind un parametru, iar $x_n \to 0$ un şir oarecare. Evident $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Pe de altă parte valoarea

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \tag{2.11}$$

depinde de $\lambda$, deci de şirul ales care converge către $(0,0)$ şi astfel, definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii nu este verificată.

**Observaţia 2.9.** Chiar dacă limita din membrul stâng al relaţiei (2.11) nu ar depinde de $\lambda$ nu se poate trage concluzia că funcţia ar avea limită în origine, deoarece şirul $(x_n, y_n)$ nu este arbitrar (v. obs. 2.5).

3. Se consideră seria $\sin^2 x(1+\cos x+\cos^2 x+\cdots)$, cu şirul sumelor parţiale $S_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Se observă că suma acestei serii este

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1+\cos x & \text{dacă } \cos x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Intrucât funcţia $S$ nu este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că seria nu este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. Pe de altă parte, pentru $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ şi $x \in [a, \pi - a]$, avem

$$|u_n(x)| \leq \max\left\{\sin^2 a \cos^n a, \frac{4}{n^2+4}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+4}}\right)^n\right\}$$

şi se poate folosi corolarul 2.1, pentru a arăta că seria este UC pe $[a, \pi - a]$.

**Exerciţiul 2.8.** 1. Să se calculeze limitele (dacă există !)

$a)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$, $\quad b)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{x}$, $\quad d)$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

2. Fie

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se arate că $f$ este continuă în fiecare variabilă, separat (i.e. pentru o valoare fixată a celeilalte), dar nu este continuă ca funcţie de două variabile.

3. Fie

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Să se arate că avem

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] = \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)],$$

dar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

nu există.

4. Fie

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Să se arate că ambele limite

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] \text{ şi } \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)],$$

nu există, în timp ce

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$