Capitolul 1

Analiză pe dreapta reală

1.1 Relaţii; cardinalitate

Noţiunile de mulţime, funcţie şi de operaţii cu mulţimi sunt presupuse a fi familiare. In continuare se va presupune că toate mulţimile în discuţie sunt submulţimi ale unei mulţimi suficient de bogate X pe care o vom numi *spaţiu*. Mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi A se va nota $\mathcal{P}(A)$ iar complementara lui A (adică $X \setminus A$) se notează A^c sau $\complement A$.

Fie A o mulţime şi I o altă mulţime pe care o vom numi *familie de indici*. O aplicaţie definită pe I cu valori în A se va numi *familie de elemente din* A. Familia se notează $(x_i)_{i\in I}$. Pot exista elemente identice în familie dacă aplicaţia nu este injectivă. Daă aplicaţia este surjectivă, atunci A este o familie indexată după familia de indici I. In particular, dacă $I = \mathbb{N}$, atunci familia de elemente din A formează un şir.

♣ **Exemplul 1.1.** *relaţiile lui De Morgan*

1. $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^c$

2. $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap\limits_{i\in I} A_i^c$

Aceste egalităţi pot fi demonstrate clasic prin dublă incluziune. Aici vom utiliza o demonstraţie bazată pe logică. In prealabil vom observa că cea de a doua relaţie este o consecinţă a celei dintâi (se scrie prima relaţie pentru mulţimile A_i^c). Fie acum $x \in X$ arbitrar. Poate avea loc una şi numai una dintre următoarele două situaţii:

1. x aparţine tuturor mulţimilor $A_i \iff x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$;

2. x nu aparţine tuturor mulţimilor $A_i \iff (\exists)\, i \in I$ astfel încât $x \in A_i^c \iff x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i^c$.

Prin urmare X se desface în două părţi disjuncte: $\bigcap_{i\in I} A_i$ şi $\bigcup_{i\in I} A_i^c$. Astfel prima relaţie este demonstrată.

Observaţia 1.1. *Funcţia caracteristică* sau *indicatorul* unei submulţimi $A \in X$ se notează cu $\mathbb{1}_A$ (sau χ_A, sau $\mathbb{I}_A$) şi avem

$$\mathbb{1}_A : X \to \{0,1\},\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

♠ **Exerciţiul 1.1.** Fie $f : X \to X$ şi $A, B \subset X$. Să se demonstreze relaţiile:

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
4. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; în ce condiţii avem egalitate ?

Să se generalizeze egalităţile precedente pentru o familie oarecare de submulţimi ale lui X.

♠ **Exerciţiul 1.2.** In condiţiile exerciţiului precedent să se arate că $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$ şi $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.

♠ **Exerciţiul 1.3.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{pentru } x \le 2 \\ x^2 & \text{pentru } x > 2 \end{cases}$. Să se arate că f este inversabilă şi să se calculeze f^{-1}.

Definiţie Fie M o mulţime. O parte $\mathcal{R}$ a produsului cartezian $M \times M$ se numeşte *relaţie binară pe* M. Dacă $(x, y) \in \mathcal{R}$ vom spune că x *este în relaţie cu* y şi scriem $x\mathcal{R}y$. In caz contrar scriem $x \not\mathcal{R} y$.

Relaţia binară $\mathcal{R}$ este numită *relaţie de ordine* dacă verifică axiomele:

1. *reflexivitate*: $x\mathcal{R}x$, $(\forall)\, x \in M$;
2. *antisimetrie*: $x\mathcal{R}y$ şi $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;
3. *tranzitivitate*: $x\mathcal{R}y$ şi $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Relaţia de ordine se zice *totală* dacă pentru orice $x, y \in M$ avem fie $x\mathcal{R}y$, fie $y\mathcal{R}x$. In caz contrar relaţia de ordine este *parţială*.

♣ **Exemplul 1.2.** Următoarele relaţii sunt de ordine:

1. Relaţia $\le$ pe $\mathbb{R}$ (aici $\mathcal{R}$ este semiplanul închis situat deasupra primei bisectoare); este o relaţie de ordine totală.
2. Relaţia de incluziune "$\subset$" în $M = \mathcal{P}(X)$; este o relaţie de ordine parţială.

3. Relaţia de divizibilitate în $\mathbb{Z}$ este parţială.

Definiţie Relaţia binară $\mathcal{R}$ se numeşte *simetrică* dacă: $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
O relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă este numită *relaţie de echivalenţă.*

O relaţie de echivalenţă permite partiţionarea mulţimii M în *clase de cehivalenţă* disjuncte, fiecare clasă conţinând elemente echivalente între ele (v. e.g. [16], [22]). Mulţimea claselor de echivalenţă, notată $M/\mathcal{R}$, este numită *mulţimea cât a lui M prin* $\mathcal{R}$. Această noţiune joacă un rol esenţial în matematică deoarece permite definirea unor concepte fundamentale cum ar fi: mulţimile de numere $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; completarea unui spaţiu metric, integrala Lebesgue, etc.

♣ **Exemplul 1.3.** Următoarele relaţii sunt de echivalenţă:

1. Relaţia de egalitate de pe $\mathbb{R}$.

2. Relaţia de congruenţă în mulţimea triunghiurilor (sau a segmentelor, patratelor, etc.) din plan.

3. Relaţia de congruenţă modulo p în $\mathbb{Z}$, pentru $p \in \mathbb{Z}$ fixat; se scrie $x \equiv y \pmod{p}$. Reamintim că $x \equiv y \pmod{p} \iff x - y \,\vdots\, p$. Mulţimea cât $\mathbb{Z}/\equiv$ se notează $\mathbb{Z}_p$ şi are o structură algebrică de inel (este corp dacă şi numai dacă p este prim). Această mulţime este formată din p elemente notate $\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{p-1}$.

Teoria cardinalelor mulţimilor, despre care vom vorbi în continuare, este datorată matematicianului german G. Cantor.

Definiţie Două mulţimi $A, B \subset X$ se numesc *echipotente* dacă există o aplicaţie bijectivă $f\colon A \to B$. In acest caz scriem $A \sim B$.

Este evident că echipotenţa este o relaţie de echivalenţă în $M = \mathcal{P}(X)$. Clasa de echivalenţă a mulţimii A se numeşte *cardinalul lui A* şi se notează $\mathrm{card}(A)$. Cardinalul mulţimii formate din un (articol nehotărât !) element se notează cu 1; cardinalul mulţimii formate din un element şi încă un element se notează cu 2, ş. a. m. d. In acest fel se obţine şirul numerelor naturale.

Mulţimea infinită poate fi definită ca o mulţime echipotentă cu o parte a ei ce nu coincide cu ea. Cardinalul unei mulţimi finite este numărul său de elemente iar cardinalul mulţimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$ (se citeşte "alef zero"); în acest caz se mai spune că mulţimea este *numărabilă.*

Cardinalele mulţimilor infinite se numesc *numere transfinite*; prin urmare $\aleph_0$ este un număr transfinit. Există o infinitate de numere transfinite; unul dintre acestea este $\mathrm{card}(\mathbb{R})$, notat $\mathfrak{c}$ şi numit *puterea continuului.*

♠ **Exerciţiul 1.4.** Să se arate că:

1. Mulţimile de puncte de pe două segmente de dreaptă oarecare sunt echipotente;

2. Mulţimea $\mathbb{N}$ este echipotentă cu orice parte infinită a sa;

3. Mulţimea $\mathbb{N}$ nu este echipotentă cu mulţimea $\mathbb{R}$;
4. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, i.e. reuniunea a două mulţimi numărabile este numărabilă.
5. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$; să se interpreteze.

1.2 Siruri numerice

Prin *sistem de numere reale* se înţelege orice *corp arhimedian total ordonat* $\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că sunt îndeplinite următoarele axiome:

1. Pe $\mathbb{R}$ sunt definite două operaţii algebrice, adunarea $(+)$ şi înmulţirea $(\cdot)$ astfel încât $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ.
2. Pe $\mathbb{R}$ este introdusă o relaţie de ordine totală, notată $\leq$; se scrie $x < y$ dacă $x \leq y$ şi $x \neq y$. Dacă $x > 0, y > 0$, atunci $xy > 0$.
3. *Axioma lui Arhimede*: Oricare ar fi $x > 0, y > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x \leq uy$.
4. *Axioma intervalelor incluse*: Dacă $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ este un şir de intervale cu proprietatea că fiecare îl include pe următorul, i.e. $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, atunci $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$.

Nu intrăm în detalii. Exemplul tipic de sistem de numere reale îl constituie mulţimea tuturor fracţiilor zecimale infinite; alt exemplu este mulţimea tăieturilor lui Dedekind (v. e.g. [16], [22]).

Conform unui rezultat teoretic clasic, orice două sisteme de numere reale sunt izomorfe şi vom nota în continuare cu $\mathbb{R}$ unul din aceste sisteme fixat odată pentru totdeauna. Evident $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, deoarece un număr raţional poate fi scris ca o fracţie zecimală infinită periodică.

Definiţie Fie $A \subset \mathbb{R}$. Elementul $\alpha \in \mathbb{R}$ se numeşte *majorant* al lui A dacă $x \leq \alpha$, $(\forall)\, x \in A$. Elementul $\beta \in \mathbb{R}$ se numeşte *minorant* al lui A dacă $\beta \leq x$, $(\forall)\, x \in A$.

O mulţime poate admite sau nu un majorant (respectiv un minorant) dar, dacă admite unul, atunci admite o infinitate. Dacă admite majorant (respectiv minorant) se numeşte *mărginită superior* (respectiv *mărginită inferior*); dacă este mărginită atât superior cât şi inferior se zice simplu *mărginită*.

Propoziţia 1.1. *O mulţime $A \in \mathbb{R}$, mărginită superior (respectiv inferior) admite un* cel mai mic majorant*(respectiv un* cel mai mare minorant*). Mai precis, există $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ (respectiv $\beta_0 \in \mathbb{R}$) astfel încât:*

1. *α_0 este majorant (respectiv β_0 este minorant);*

2. *$(\forall)\,\varepsilon > 0$, numărul $\alpha_0 - \varepsilon$ nu este majorant (respectiv numărul $\beta_0 + \varepsilon$ nu este minorant); aceasta se poate scrie $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0] \cap A \neq \emptyset$ (respectiv $[\beta_0, \beta_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$).*

Demonstraţie. Presupunem că mulţimea A este mărginită superior; atunci există un interval $[a_0, b_0]$ astfel încât b_0 este majorant al lui A iar $[a_0, b_0] \cap A \neq \emptyset$. Fie c_0 mijlocul intervalului $[a_0, b_0]$. Vom nota cu $[a_1, b_1]$ intervalul $[a_0, c_0]$ sau $[c_0, b_0]$ după cum c_0 este majorant sau nu (deci b_1 este majorant iar a_1 nu este). Se consideră în continuare mijlocul c_1 al intervalului $[a_1, b_1]$ şi se notează cu $[a_2, b_2]$ intervalul $[a_1, c_1]$ sau $[c_1, b_1]$ după cum c_1 este majorant sau nu (deci b_2 este majorant iar a_2 nu este). Continuând acest procedeu se obţine şirul de intervale $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, fiecare inclus în prcedentul. Conform axiomei intervalelor incluse $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ şi, deoarece $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ rezultă că există un singur punct α comun tuturor intervalelor. Pe de altă parte, deoarece b_n este majorant pentru orice $n \in \mathbb{N}$ iar $b_n - \alpha \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$, rezultă că α este majorant. Presupunem că ar exista $\varepsilon > 0$ astfel încât $\alpha - \varepsilon$ să fie majorant; atunci, pentru n suficient de mare, am avea $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha$ ceea ce ar fi în contradicţie cu condiţia ca a_n să nu fie majorant. In concluzie α este marginea superioară a mulţimii A.

Existenţa marginii inferioare se tratează de o manieră similară. □

Observaţia 1.2. Marginea superioară (respectiv inferioară) a mulţimii A se notează $\sup A$ (respectiv $\inf A$). Dacă marginea superioară (inferiară) este un element al mulţimii A, atunci ea se poate nota $\max A$ (respectiv $\min A$).

Marginea superioară (inferioară) a unei mulţimi poate exista sau nu, dar dacă există, atunci ea este unică.

♠ **Exerciţiul 1.5.** Să se determine marginile (dacă există) următoarelor mulţimi:
1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 < 16\}$;
2. $A = \{\cos(-3), \cos 1, \cos 2, \cos(-1,5)\}$;
3. $A = \{\cos \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Structura topologică este definită de familiile de vecinătăţi ale fiecăruia din punctele sale. Vecinătate a unui punct $x \in \mathbb{R}$ este orice mulţime ce conţine un interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$.

Un şir $(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ se zice *convergent către* $x \in \mathbb{R}$ (aceasta se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$) dacă este verificată una dintre următoarele două definiţii, echivalente între ele (v. [6, 11]):

Definiţia cu vecinătăţi: In orice vecinătate a lui x se găsesc toţi termenii şirului începând de la un anumit rang (sau toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit).

Definiţia cu ε: Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$.

♣ **Exemplul 1.4.** Folosind "definiţia cu ε" vom demonstra că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

Intr-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ avem

$$\left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3(3n+2)} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}$$

Prin urmare putem lua

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } 1-6\varepsilon \leq 0 \\ \left[\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right] + 1 & \text{pentru } 1-6\varepsilon > 0 \end{cases}$$

Propoziţia 1.2. *1. Orice şir convergent este mărginit.*

2. Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.

3. Un şir monoton şi mărginit este convergent.

Demonstraţie. 1. Presupunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi luăm $\varepsilon = 1$ în "definiţia cu ε"; rezultă că există un rang N astfel încât $|x_n - x| < 1$ pentru orice $n \geq N$ care antrenează $|x_n| \leq |x| + 1$ pentru orice $n \geq N$. Aşadar, dacă punem $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n-1}|, |x| + 1\}$ vom avea $|x_n| \leq M$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, adică şirul este mărginit.

2. Dacă şirul $(x_n, n \in \mathbb{N})$ este mărginit există $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât toţi termenii şirului se găsesc în intervalul $[a_0, b_0]$. Dacă împărţim acest interval în două părţi egale, atunci cel puţin una dintre jumătăţi va conţine o infinitate de termeni ai şirului (în caz contrar şirul nu ar avea o infinitate de termeni); fie $[a_1, b_1]$ o astfel de jumătate şi în acest interval un termen oarecere al şirului pe care îl notăm x_{n_1}. Intervalul $[a_1, b_1]$ se împarte la rândul său în două părţi egale şi se notează cu $[a_2, b_2]$ o jumătate a sa ce conţine o infinitate de termeni precum şi un termen oarecare x_{n_2} situat aici, ş. a. m. d. In acest fel se obţine un şir de intervale $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{R}$, precum şi un subşir $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{R}$. La fel ca în propoziţia 1.1 va rezulta că există un unic punct x comun tuturor intervalelor $[a_k, b_k]$ şi, deoarece $|x_{n_k} - x| \leq b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$, vom avea $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

3. Fie $x = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$; prin ipoteză $x < \infty$ şi, din definiţia marginii superioare, rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există termeni ai şirului în intervalul $(x-\varepsilon, x]$. Datorită monotoniei, toţi termenii şirului, începând de la un anumit rang, se găsesc în acest interval astfel că $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Observaţia 1.3. Reciproca afirmaţiei din 1.2, pct. 3 este falsă, în general, contrar unor confuzii care se fac uneori. De exemplu, şirul $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent către zero, dar nu este monoton.

Considerăm simbolurile $-\infty$ (minus infinit) şi $+\infty$ (plus infinit), fără a le da deocamdată vreo semnificaţie, precum şi mulţimea $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ care este numită *dreapta încheiată*. Structura de ordine de pe $\mathbb{R}$ se extinde pe $\overline{\mathbb{R}}$ postulând: $-\infty < x < \infty$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Pe dreapta încheiată orice mulţime are margini, acestea putând fi $\pm\infty$. De exemplu $\sup \mathbb{Z} = \infty$, $\inf \mathbb{Q} = -\infty$, etc.

De asemenea, structura topologică de pe $\mathbb{R}$ se extinde şi ea pe dreapta încheiată luând ca vecinătăţi ale lui $+\infty$ orice mulţime ce conţine o mulţime de forma $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \cup \{+\infty\} = (a, \infty]$, $a \in \mathbb{R}$; o vecinătate a lui $-\infty$ este orice mulţime ce conţine o mulţime de forma $\{-\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = [-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$. In acest fel se pot defini şiruri cu limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$); semnificaţia unui şir cu limita $+\infty$ $(-\infty)$ este aceea că termenii săi cresc (descresc) oricât de mult. Definiţia cu vecinătăţi pentru limite infinite este aceeaşi ca şi pentru cazul limitelor finite iar definiţia cu ε este similară.

Definiţie Spunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectiv $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$) dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $x_n > \varepsilon$ (respectiv $x_n < \varepsilon$) oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$.
Sirurile cu limită finită vor fi numite şiruri *convergente* iar celelalte *divergente*. De asmenea, un şir poate avea limită (finită sau infinită) sau poate să nu aibă nici un fel de limită; astfel un şir divergent este un şir cu limită infinită sau care nu are nici un fel de limită.

♣ **Exemplul 1.5.** 1. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n} = \infty$; pentru aceasta fie $\varepsilon > 0$ şi, din inecuaţia $x_n > \varepsilon$, deducem

$$n > \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} \Rightarrow N(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \varepsilon^2 - 4 \leq 0 \\ \left[\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2-4}}{2} + 1\right] + 1 & \text{pentru } \varepsilon^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

2. Sirul $x_n = (-1)^n$ nu are limită (deci este divergent) dar este mărginit.

3. Sirul $x_n = n + (-1)^n$ are limita ∞ (deci este divergent) şi este nemărginit.

Există un set important de teoreme denumite generic "operaţii cu şiruri convergente" (v. e.g. [6], [11]); o astfel de teoremă este, de exemplu, următoarea afirmaţie: dacă şirurile $(a_n, n \in \mathbb{N})$ şi $(b_n, n \in \mathbb{N})$ sunt convergente iar $a_n \to a$ şi $b_n \to b$, atunci şirul $(a_n + b_n, n \in \mathbb{N})$ este convergent şi $a_n + b_n \to a + b$.

Se pune problema extinderii acestor teoreme pentru şiruri cu limite infinite. Astfel se poate demonstra că:

$$a_n \to \infty,\ b_n \to \infty \Rightarrow a_n + b_n \to \infty$$

Acest rezultat se enunţă prescurtat (simbolic) prin relaţia $\infty + \infty = \infty$.

Alte rezultate a căror semnificaţie este evidentă sunt: $a + \infty = \infty$, $a \in \mathbb{R}$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty^\infty = \infty$; $\frac{a}{\infty} = 0$, $a \in \mathbb{R}$; $a \cdot \infty = (\operatorname{sgn} a)\infty$, $a \neq 0$; etc.

♣ **Exemplul 1.6.** 1. Fie $a_n = n^2 \to \infty$, $b_n = n \to \infty$; rezultă $a_n - b_n \to \infty$.

2. Fie $a_n = n \to \infty$, $b_n = n^2 \to \infty$; rezultă $a_n - b_n \to -\infty$.

3. Fie $a_n = n + \frac{n+1}{n} \to \infty$, $b_n = n \to \infty$; rezultă $a_n - b_n \to 1$.

4. Fie $a_n = n + (-1)^n \to \infty$, $b_n = n \to \infty$; rezultă $a_n - b_n$ nu are limită.

Acest exemplu arată că simbolului $\infty - \infty$ nu i se poate atribui nici un fel de semnoficaţie; exemplul nostru justifică denumirea oarecum improprie de "nedeterminare" care este utilizată în unele manuale. Se mai spune că acesta este un simbol fără sens. Alte simboluri din aceeaşi categorie sunt: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^∞; 0^0; etc.

Definiţie Se spune că punctul $x \in \mathbb{R}$ este *punct limită* al şirului $(x_n, n \in \mathbb{N})$ dacă în orice vecinătate a lui x se găsesc o infinitate de termeni ai şirului.

♣ **Exemplul 1.7.** 1. Sirul $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ are două puncte limită $\ell_1 = -1$ şi $\ell_2 = 1$.

2. Punctele limită ale şirului $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2^2}, \ldots, 1, \frac{1}{2^n}, \ldots$ sunt $\ell_1 = 0$ şi $\ell_2 = 1$.

Definiţie Marginea superioară (respectiv inferioară) a mulţimii punctelor limită ale unui şir $(x_n, n \in \mathbb{N})$ se numeşte *limita superioară* (respectiv *limita inferioară* a şirului şi se notează $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ (respectiv $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$).

♣ **Exemplul 1.8.** Fie $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$. Avem

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n = 2k \\ 1 & \text{pentru } n = 4k+1 \\ -1 & \text{pentru } n = 4k+3 \end{cases}$$

Prin urmare $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

♠ **Exerciţiul 1.6.** 1. Să se arate că x este punct limită al şirului $(x_n, n \in \mathbb{N})$ dacă şi numai dacă există un subşir convergent către x.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

3. Pentru şirul $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ să se determine $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Definiţie Spunem că şirul $(x_n, n \in \mathbb{N})$ este un *şir Cauchy* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \geq N(\varepsilon)$ şi $p \geq 1$ (sau echivalent $|x_m - x_n| < \varepsilon$ oricare ar fi $m, n \geq N(\varepsilon)$).

Noţiunea de şir Cauchy pune într-o formă matematică ideea că termenii şirului "se apropie" între ei.

Propoziţia 1.3. *1. Orice şir convergent este şir Cauchy.*

2. Un şir Cauchy este mărginit.

3. Dacă un şir Cauchy conţine un subşir convergent, atunci el este convergent.

Demonstraţie. Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

1. Este o consecinţă a inegalităţii

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x_n - x|$$

2. Se ia $\varepsilon = 1$ în "definiţia cu ε" şi rezultă că există un rang N astfel încât $|x_n - x| \leq 1$ pentru $n \geq N$; de aici rezultă $|x_n| \leq |x| + 1$ pentru $n \geq N$. Prin urmare, dacă punem $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x| + 1\}$, atunci $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \geq N$.

3. Considerăm subşirul $(x_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ şi presupunem că $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Fie acum $\varepsilon > 0$; rezultă că există rangurile $N_1(\varepsilon)$ şi $N_2(\varepsilon)$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ m, n \geq N_1(\varepsilon)$$

deoarece şirul este Cauchy, iar

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ k \geq N_2(\varepsilon)$$

deoarece subşirul este convergent.
Dacă punem $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$, atunci, pentru $k \geq N(\varepsilon)$, din cele două inegalităţi rezultă

$$|x_k - x| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

deoarece, evident, $n_k \geq k \geq N(\varepsilon)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.1. *(*Criteriul general al lui Cauchy*) Un şir este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Demonstraţie. Implicaţia "numai dacă" face obiectul propoziţiei 1.3, pct. 1. Reciproc, dacă şirul este Cauchy, atunci el este mărginit (cf. propozitţei 1.3, pct. 2). Cum un şir mărginit conţine un subşir convergent (v. propoziţia 1.2, pct 2), demonstraţia rezultă din propoziţia 1.3, pct. 3. □

♣ **Exemplul 1.9.** Se consideră şirul

$$x_n = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}$$

şi vom folosi criteriul lui Cauchy pentru a arăta că este convergent. Pentru aceasta fie $\varepsilon > 0$; avem

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}\right| \\
&\leq \frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)^2} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Prin urmare, pentru $n \geq N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ şi orice $p \geq 1$ vom avea $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, adică şirul este Cauchy, deci convergent.

1.3 Serii numerice

Unui şir de numere complexe $(u_n, n \in \mathbb{N})$ i se poate ataşa şirul $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, $n \in \mathbb{N}$, numit *şirul sumelor sale parţiale.*

Definiţie Sirul de perechi (u_n, s_n), $n \in \mathbb{N}$, se numeşte *serie* şi se notează $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ sau $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$. Dacă şirul $(s_n,\ n \in \mathbb{N})$ este convergent, atunci limita sa s este numită *suma seriei* şi se notează $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. In acest caz se spune că seria este convergentă. Dacă şirul sumelor parţiale este divergent (nu are limită sau are limită infinită) se spune că seria este divergentă. Elementele şirului $(u_n,\ n \in \mathbb{N})$ sunt *termenii seriei.*

Notiunea de serie atribuie un sens matematic ideii de sumă infinită. Seria de numere reale este un caz particular al celei de numere complexe. In fapt o serie de numere complexe poate fi tratată ca două serii de numere reale; este vorba despre seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Re u_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Im u_n$.

♣ **Exemplul 1.10.** Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$, $x \in \mathbb{R}$ este numită *seria geometrică*. Pentru $|x| < 1$ seria este convergentă şi are suma $s = \frac{1}{1-x}$; pentru $|x| \geq 1$ seria este divergentă.

Următoarele proprietăţi sunt consecinţe imediate ale definiţiei precedente (v. e.g. [17], [13])

• Dacă la serie adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială.

• Dacă la serie schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială.

• O serie cu termeni pozitivi (i.e. numere rele şi pozitive) este convergentă sau divergentă după cum şirul sumelor parţiale este mărginit sau nu.

• Pentru orice $a \neq 0$, seriile $\sum u_n$ şi $\sum(a\, u_n)$ au aceeaşi natură.

• Dacă seria $\sum u_n$ este convergentă, atunci $u_n \to 0$. Justificarea este o consecinţă a egalităţii $u_n = s_n - s_{n-1}$.

• Dacă şirul $(u_n, n \in \mathbb{N})$ nu tinde la zero (i.e. este divergent sau are o limită diferită de zero), atunci seria $\sum u_n$ este divergentă.

Problema centrală în studiul unei serii este stabilirea naturii sale. In acest scop există o serie de criterii care depind de tipul seriei şi anume: criterii pentru serii cu termeni pozitivi şi criterii pentru serii cu termeni oarecari (numere reale sau complexe arbitrare).

Propoziţia 1.4. *(*Criterii de comparaţie*) Fie $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ două serii cu termeni pozitivi.*

1. Presupunem că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $u_n \leq v_n, (\forall)\, n \geq N$. Atunci:

a) Dacă seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum u_n$ este de asemenea convergentă.

b) Dacă seria $\sum u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum v_n$ este de asemenea divergentă.

2. Presupunem că există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell,\ 0 < \ell < \infty$$

Atunci cele două serii au aceeaşi natură.

Demonstraţie. 1. Din proprietăţile generale ale seriilor rezultă că putem lua $N = 0$ şi fie $(s_n,\ n \in \mathbb{N})$ şi $(\sigma_n,\ n \in \mathbb{N})$ şirurile sumelor parţiale ale celor două serii respectiv. Aceste şiruri sunt crescătoare şi au termenii pozitivi iar prin ipoteză $s_n \leq \sigma_n,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}$, astfel că demonstraţia este o consecinţă a definiţiei convergenţei unei serii.

2. Fie $0 < \varepsilon < \ell$; există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon,\ (\forall)\, n \geq N(\varepsilon)$$

Prin urmare

$$\ell - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < \ell + \varepsilon,\ (\forall)\, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow (\ell - \varepsilon)v_n < u_n < (\ell + \varepsilon)v_n,\ (\forall)\, n \geq N(\varepsilon)$$

şi demonstraţia rezultă din pct. 1. □

♣ **Exemplul 1.11.** Fie seria cu termenul general $u_n = \frac{1}{n^2}$. Observăm că $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$, $(\forall)\, n \geq 2$ şi considerăm seria cu termenul general $v_n = \frac{1}{(n-1)n}$, $n \geq 2$ şi $v_0 = v_1 = 1$; şirul sumelor sale parţiale, pentru $n \geq 2$, este

$$\sigma_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 3 - \frac{1}{n}$$

deci este convergent. In consecinţă seria $\sum u_n$ este convergentă, conformcu propoziţia 1.4, pct. 1.

Observaţia 1.4. (importantă) Seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ este numită *seria armonică generalizată.* Se demonstrează că această serie este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$. Acest rezultat poate fi demonstrat folosind criteriul integral al lui Cauchy (v. Cap. 6 sau [8], [17], [13]).

♣ **Exemplul 1.12.** Fie seria cu termenul general $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5+1}}$. Pentru a determina natura sa vom folosi propoziţia 1.4, pct. 2, luând $v_n = \dfrac{1}{\sqrt[6]{n^7}}$ care este convergentă conform observaţiei 1.4; mai trebuie observat că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$ pentru a conchide că seria noastră este convergentă.

Propoziţia 1.5. *(*Criteriul rădăcinii al lui Cauchy*) Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi; presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \ell$. Atunci:*

a) Dacă $\ell < 1$ seria $\sum u_n$ este convergentă.

b) Dacă $\ell > 1$ seria $\sum u_n$ este divergentă.

Demonstraţie. a) Deoarece $\ell < 1$ putem alege $\varepsilon > 0$ astfel încât $0 < \ell+\varepsilon < 1$. Prin ipoteză există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$|\sqrt[n]{u_n} - \ell| < \varepsilon,\ (\forall)\, n \geq N(\varepsilon)$$

şi de aici rezultă

$$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon,\ (\forall)\, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow u_n < (\ell+\varepsilon)^n,\ (\forall)\, n \geq N(\varepsilon)$$

Deoarece seria $\sum(\ell+\varepsilon)^n$ este convergentă (serie geometrică cu raţie subunitară) concluzia rezultă din propoziţia 1.4, pct. 1.

b) Deoarece $\ell > 1$ putem alege $\varepsilon > 0$ astfel încât $\ell - \varepsilon > 1$. La fel ca mai sus există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $u_n > (\ell-\varepsilon)^n$, $(\forall)\, n \geq N$ iar seria $\sum(\ell-\varepsilon)^n$ este divergentă, astfel că se va folosi din nou propoziţia 1.4, pct. 1. □

Propoziţia 1.6. *(*Criteriul raportului al lui d'Alembert*) Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi; presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Atunci:*

a) Dacă $\ell < 1$ seria $\sum u_n$ este convergentă.

b) Dacă $\ell > 1$ seria $\sum u_n$ este divergentă.

Demonstraţie. a) Alegem ε şi $N = N(\varepsilon)$ ca la propoziţia 1.5, a) şi vom avea $u_{n+1} < (\ell+\varepsilon)u_n$, $(\forall)\, n \geq N$. Rezultă că, pentru $n \geq N$, avem

$$\left.\begin{array}{ccc} u_{N+1} & < & (\ell+\varepsilon)u_N \\ u_{N+2} & < & (\ell+\varepsilon)u_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & < & (\ell+\varepsilon)u_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n < (\ell+\varepsilon)^{n-N}u_N$$

Deoarece seria $\sum(\ell+\varepsilon)^{n-N}$ este convergentă (serie geometrică cu raţie subunitară) conluzia rezultă din propoziţia 1.4, pct. 1.

b) Alegem ε şi $N = N(\varepsilon)$ ca la propoziţia 1.5, b) şi vom avea $u_{n+1} > (\ell-\varepsilon)u_n$, $(\forall)\, n \geq N \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ $(\forall)\, n \geq N$ deoarece $\ell - \varepsilon > 1$; prin urmare şirul $(u_n,\ n \geq N)$ este crescător astfel că el nu poate să tindă la zero, deci seria este divergentă. □

Observaţia 1.5. (**importantă**) 1. Propoziţiile 1.5 şi 1.6 au fost enuţate pentru cazul particular al existenţei limitei ℓ. Se poate demonstra că aceste criterii pot fi enunţate într-o formă mai generală şi anume luând $\ell = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, respectiv $\ell = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (v. e.g. [13], [16], [24]).
2. La criteriile din propoziţiile 1.5 şi 1.6 nu se precizează ce se întâmplă dacă $\ell = 1$; în această situaţie (şi nu sunt puţine !) trebuie aplicate alte criterii. Uneori se poate folosi următorul criteriu pe care-l enunţăm fără demonstraţie: (v. [16], [21]).

Propoziţia 1.7. *(*Criteriul Raabe-Duhamel*) Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi; presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \ell$. Atunci:*

a) Dacă $\ell > 1$ seria $\sum u_n$ este convergentă.
b) Dacă $\ell < 1$ seria $\sum u_n$ este divergentă.

Nici acest criteriu nu precizează ce se întâmplă dacă $\ell = 1$.

♣ **Exemplul 1.13.** 1. Fie seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n}{2^n}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

rezultă că seria este convergentă conform cu prop. 1.5.
2. Fie seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^3}{n!}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$$

astfel că seria este convergentă.
3. Pentru seria cu termenul general $u_n = n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ nu se poate aplica criteriul raportului deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; vom folosi criteriul Raabe-Duhamel (propoziţia 1.7) şi obţinem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} - (n+1)^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}}\right)}{(n+1)^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}} - (n+1)^2\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{(n+1)\mathrm{e}^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - (n+1)^2}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right) + n^2 - (n+1)^2}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right) - 2 = \infty
\end{aligned}$$

astfel că seria este convergentă. Următoarele criterii se referă la serii cu termeni oarecari.

Teorema 1.2. *(*Criteriul general al lui Cauchy pentru serii*) O serie cu termeni oarecari (reali sau complecşi) $\sum u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon,\ (\forall)\, n \geq N(\varepsilon)\ \text{şi}\ (\forall)\, p \geq 1$$

Demonstraţie. Fie $(s_n, n \in \mathbb{N})$ şirul sumelor parţiale ale seriei date. Deoarece

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}|$$

demonstraţia rezultă de o manieră evidentă din teoremei 1.1. □

Propoziţia 1.8. *(*Criteriul Dirichlet-Abel*) Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni reali oarecari iar $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ un şir descrescător şi convergent către zero. Dacă şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum u_n$ este mărginit, atunci seria $\sum \alpha_n u_n$ este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $(s_n, n \in \mathbb{N})$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum u_n$; prin ipoteză există $M > 0$ astfel încât $|s_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi fie $\varepsilon > 0$. Avem

$$\begin{aligned}
&|\alpha_{n+1}\, u_{n+1} + \alpha_{n+2}\, u_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}\, u_{n+p}| \\
&\qquad = |\alpha_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \alpha_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \cdots + \alpha_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| \\
&\qquad = |-\alpha_{n+1}s_n + s_{n+1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + s_{n+2}(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \cdots \\
&\qquad + s_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}s_{n+p}| \leq M(\alpha_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) \\
&\qquad + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \cdots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}) = 2M\, \alpha_{n+1}
\end{aligned}$$

Deoarece $\alpha_{n+1} \to 0$, concluzia dorită rezultă din teorema 1.1. □

Corolarul 1.1. *Dacă seria $\sum u_n$ este convergentă iar $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$, este un şir monoton şi mărginit, atunci seria $\sum \alpha_n u_n$ este convergentă.*

Demonstraţie. Pentru a face o alegere presupunem că şirul $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ este crescător şi fie α limita sa (cf. propoziţiei 1.2, pct. 3). Deoarece seria $\sum u_n$ este convergentă rezultă că şirul sumelor sale parţiale este mărginit astfel că, din propoziţia 1.8, rezultă convergenţa seriei $\sum(\alpha - \alpha_n)u_n$, deci şi a seriei $\sum \alpha_n u_n$. □

Corolarul 1.2. *(*Criteriul lui Leibniz*) Se consideră o serie de forma $\sum(-1)^n v_n$ sau $\sum(-1)^{n+1} v_n$, unde $v_n > 0$ (o astfel de serie este numită* alternată*). Dacă $(v_n, n \in \mathbb{N})$ este un şir descrescător convergent către zero, atunci seria alternată este convergentă.*

Demonstraţie. Este suficient ca în propoziţia 1.8 săluăm $u_n = (-1)^n$ şi $v_n = \alpha_n$. □

Observaţia 1.6. Uneori, în mod eronat, se invocă criteriul lui Leibniz fără a se verifica monotonia şrului $(v_n, n \in \mathbb{N})$.

♣ **Exemplul 1.14.** 1. Fie seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$; pentru $x = 0$ seria este convergentă. Pentru $x \neq 0$ vom lua în propoziţia 1.8 $u_n = \sin nx$ şi $\alpha_n = \frac{1}{n}$. De asemenea observăm că

$$|u_1 + u_2 + \cdots + u_n| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

deci sunt îndeplinite condiţiile criteriului lui Dirichlet.
2. Seria cu termenul general $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergentă pentru orice $\alpha > 0$ conform criteriului Leibniz.
3. Considerăm seria alternată cu termenul general $u_n = (-1)^n \dfrac{2 + (-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Deşi $|u_n| \to 0$, seria este divergentă deoarece, în caz contrar, din egalitatea $u_n = \frac{2\,(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}$ ar rezulta că seria $\sum \frac{1}{n}$ este convergentă (diferenţa a două serii convergente), ceea ce este o contradicţie. Explicaţia este că şirul $(|u_n|,\ n \in \mathbb{N}^*)$ nu este descrescător (v. observaţia 1.6).

Definiţie Seria $\sum u_n$ (cu termeni complecşi) se numeşte *absolut convergentă* dacă seria $\sum |u_n|$ este convergentă.
Datorită teoremei 1.2 şi a inegalităţii

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1|} + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|$$

rezultă că o serie absolut convergentă este convergentă. Reciproca acestei afirmaţii nu este în general adevărată şi exemplul clasic este oferit de seria armonică $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. O serie convergentă dar care nu este absolut convergentă se numeşte *semiconvergentă.*

Următoarele rezultate le referitoare la seriile absolut convergente le enunţăm fără demonstraţie (v. e.g. [17], [15], [3], [21]).

Propoziţia 1.9. *Seria care se obţine prin orice permutare a termenilor unei serii absolut convergente este, de asemenea, absolut convergentă şi are aceeaşi sumă cu seria iniţială.*

Teorema 1.3. *(*Mertens*) Fie $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ două serii cu termeni complecşi, absolut convergente având sumele u şi respectiv v. Seria cu termenul general (numită* seria produs*)* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0\, v_n + u_1\, v_{n-1} + \cdots + u_n\, v_0$ *este absolut convergentă şi suma sa este $u\,v$.*

Observaţia 1.7. In mod firesc se pune întrebarea despre permutarea termenilor unei serii semiconvergente. In cazul unei astfel de serii se poate demonstra (*teorema lui Riemann*) că termenii săi pot permutaţi de aşa manieră încât şirul sumelor sale parţiale să aibă, la alegere, oricare dintre proprietăţile: să fie convergent şi să aibă o limită prescrisă; să nu aibă nici o limită; să tindă la $+\infty$; să tindă la $-\infty$ (v. e.g. [3], [15])

♣ **Exemplul 1.15.** 1. Se consideră seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n$, $|x| < 1$ care este absolut convergentă şi are suma $\frac{1}{1-x}$. Vom face produsul dintre această serie şi ea însăşi; termenul general al seriei produs este $w_n = nx^{n-1}$, astfel că, conform teoremei 1.3, s-a obţinut relaţia

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Fie seria cu termenul general $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$. Această serie este alternată şi observă că funcţia $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$ este crescătoare; prin urmare şirul $|u_n|$, $n \geq 1$, este descrescător astfel că, din corolarul 1.2, rezultă că seria este convergentă. Pe de altă parte, seria nu este absolut convergentă după cum rezultă cu uşurinţă dacă se utilizează propoziţia 1.4, pct. 1. In concluzie seria dată este semiconvergentă.

1.4 Dezvoltări limitate

Fie $I = [a,b] \in \mathbb{R}$ un interval. O funcţie $f\colon I \to \mathbb{R}$ se numeşte de clasă $C^n(I)$ dacă f este de n ori derivabilă şi derivata de ordinul n este continuă.

Teorema 1.4. *(*Formula lui Taylor*) Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$. Pentru orice $x_0 \in (a,b)$ şi pentru orice $x \in [a,b]$ există un punct ξ între x_0 şi x, astfel încât:*

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!}f'(t) - \cdots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) - \alpha\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

unde α este astfel ales încât $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cum $\varphi(x) = 0$ va rezulta

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) - \cdots - \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \\ - \alpha \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Deoarece φ este derivabilă pe $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0,]$) rezultă (teorema lui Rolle) că există ξ între x_0 şi x astfel încât $\varphi'(\xi) = 0$. Dar

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = & - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right]' + \alpha \frac{(x-t)^n}{n!} \\ = & - f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[- \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \right] + \alpha \frac{(x-t)^n}{n!} \\ = & - f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \\ & + \alpha \frac{(x-t)^n}{n!} = -f'(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \\ & - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \alpha \frac{(x-t)^n}{n!} = - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \alpha \frac{(x-t)^n}{n!} \\ = & \frac{(x-t)^n}{n!} \left[\alpha - f^{(n+1)}(t) \right] \end{aligned}$$

Rezultă $\alpha = f^{(n+1)}(\xi)$. Inlocuind în (1.2) se obţine (1.1). □

Observaţia 1.8. Mai general formula lui Taylor se scrie sub forma

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

unde termenul $R_n(x)$ este numit *rest*. In cazul relaţiei (1.2) restul are forma

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

şi este numit *restul lui Lagrange*. Pentru alte forme ale restului v. [3], [17].

Corolarul 1.3. *Fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, $f \in C^{n+1}([-a, a])$. Pentru orice $x \in [-a, a]$ există un punct ξ între 0 şi x astfel încât*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{1.3}$$

Demonstraţie. Caz particular al relaţiei (1.1). □

Corolarul 1.4. *Fie P o funcţie polinomială cu* $\operatorname{grad} P \leq n$. *Pentru orice* $a \in \mathbb{R}$ *avem*

$$P(x) = P(a) + \frac{x-a}{1!}P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}P''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a)$$

Demonstraţie. Este o consecinţă a relaţiei (1.1) deoarece $P^{(n+1)}(x) = 0$. □

Dacă funcţia f îndeplineşte condiţiile teoremei 1.4, putem scrie

$$f(x) = P_n(x) + \alpha(x),\ x \in I \tag{1.4}$$

unde

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

iar $\alpha(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$ este restul lui Lagrange. Observăm că P_n este o funcţie polinomială şi grad $P_n \leq n$, iar α verifică relaţia

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \tag{1.5}$$

O funcţie $\alpha(x)$ care verifică (1.5) este numită *neglijabilă de ordin n în vecinătatea lui x_0* şi se notează $o((x-x_0)^n)$. Prin urmare o neglijabilă de ordin n se caracterizează prin relaţia

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0 \tag{1.6}$$

Cu aceste notaţii (1.4) devine

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n),\ x \in V,\ \operatorname{grad} P_n \leq n \tag{1.7}$$

unde V este o vecinătate a punctului x_0.

Definiţie Spunem că funcţia f admite o *dezvoltare limitată de ordin n în jurul punctului x_0* dacă ea poate fi scrisă sub forma (1.7). Polinomul $P_n(x)$ este numit *partea regulată a dezvoltării limitate.*
Conceptul acesta poate fi extins cu uşurinţă în vecinătatea punctului ∞. Substituţia $x - a = y$ permite să luăm în consideraţie doar cazul $x_0 = 0$.

Propoziţia 1.10. *Dezvoltarea limitată (dacă există) a unei funcţii în jurul originii este unică.*

Demonstraţie. Presupunem că într-o vecinătate a originii avem $f(x) = P_1(x) + o_1(x^n) = P_2(x) + o_2(x^n)$ unde grad $P_1 \le n$, grad $P_2 \le n$. Dacă $P_1 - P_2$ nu este nul, atunci el poate fi scris sub forma $P_1(x) - P_2(x) = b_k x^k + \cdots + b_n x^n$, cu $b_k \neq 0$ şi $k \le n$. Rezultă

$$b_k + \cdots + b_n x^{n-k} = \frac{o_2(x^n) - o_1(x^n)}{x^k}$$

care antrenează

$$\lim_{x\to 0}(b_k + \cdots + b_n x^{n-k}) = b_k = \lim_{x\to 0} \frac{o_2(x^n) - o_1(x^n)}{x^k} = 0$$

care vine în contradicţie cu faptul că $b_k \neq 0$. Prin urmare $P_1 = P_2$ şi deci $o_1(x^n) = o_2(x^n)$. □

♣ **Exemplul 1.16.** Indicăm câteva dezvoltări limitate clasice obţinute prin folosirea relaţiei (1.3)

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$, $|x| < 1$.
2. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$, $|x| < 1$
4. $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

$$+o(x^n),\ |x| < 1, (\alpha \notin \mathbb{Z}).$$

5. $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$, $x \in \mathbb{R}$.
6. $\sin x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$, $x \in \mathbb{R}$.

Propoziţia următoare se referă la operaţii cu funcţii ce admit dezvoltări limitate (v. e.g. [10])

Propoziţia 1.11. *1. Dacă funcţiile f şi g admit dezvoltări limitate de ordin n în jurul originii, atunci funcţiile $f+g$ şi fg au aceeaşi proprietate.*
2. In condiţiile pct. 1 şi dacă partea principală a funcţiei g este nenulă în origine, funcţia $\dfrac{f}{g}$ admite dezvoltare limitată de ordinul n în jurul lui $x = 0$.
3. In condiţiile pct. 1 şi dacă $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, funcţia compusă $f \circ g$ admite dezvoltare limitată în jurul punctului $x = 0$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai pct. 1. Prin ipoteză avem $f(x) = P_1(x) + o_1(x^n)$ şi $g(x) = P_2(x) + o_2(x^n)$ de unde rezultă

$$f(x) + g(x) = (P_1 + P_2)(x) + [o_1(x^n) + o_2(x^n)]$$

şi

$$f(x)\,g(x) = [P_1\,P_2 + P_1\,o_2(x^n) + P_1\,o_2(x^n) + o_1(x^n)\,o_2(x^n)$$

Deoarece

$$\lim_{x\to 0} \frac{o_1(x^n) + o_2(x^n)}{x^n} = 0$$

partea regulată pentru $f+g$ este $(P_1+P_2)(x)$. In ceea ce priveşte produsul observăm polinomul $P_1\,P_2$ poate fi scris sub forma $P_1(x)\,P_2(x) = Q(x) + x^{n+1}R(x)$ unde Q şi R sunt polinoame cu grad $Q \le n$, iar

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}R(x) + P_1\,o_2(x^n) + P_1\,o_2(x^n) + o_1(x^n)\,o_2(x^n)}{x^n} = 0$$

Astfel, partea regulată a produsului este $Q(x)$. □

♣ **Exemplul 1.17.** 1. Folosind dezvoltările limitate vom calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

Utilizând exemplul 1.16

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$
$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

rezultă

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{12}}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

2. Considerăm seria cu termenul general $u_n = \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$, $p \in \mathbb{R}$. Pentru $p \le 0$ seria este evident divergentă. Folosind dezvoltările limitate clasice avem

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\left[1 - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right] = \mathrm{e}\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$$

Pentru a obţine dezvoltarea limitată a termenului $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{n}\right)}$ vom folosi dezvoltarea lui e^y pentru $y = -\frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{n}\right)$ unde vom reţine numai termenii ce conţin doar pe $\frac{1}{n}$, puterile mai mari fiind înglobate în $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Va rezulta că

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]=\frac{\mathrm{e}}{2}$$

Din propoziţia 1.4, pct. 2, rezultă că seria noastră are aceeaşi natură cu seria cu termenul general $v_n=\frac{1}{n^p}$, deci este convergentă pentru $p>1$ şi divergentă pentru $p\le 1$ (v. observaţia 1.4).

1.5 Siruri şi serii de funcţii

Fie $A\subset \mathbb{R}$, $f_n\colon A\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ un şir de funcţii, iar $f\colon A\to\mathbb{R}$ o altă funcţie. Pentru fiecare $x_0\in A$, $f_n(x_0), n=1,2,\ldots$ este un şir numeric. Dacă $f_n(x_0)\to f(x_0)$, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există un rang $N(\varepsilon,x_0)$ (întrucât şirul numeric depinde de punctul x_0) astfel încât $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$ oricare ar fi $n\ge N(\varepsilon,x_0)$.

Definiţie Dacă $f_n(x_0)\to f(x_0)$ pentru orice $x_0\in A$ se spune că şirul de funcţii $(f_n, n=1,2,\ldots)$ este *punctual convergent pe A către f* şi vom scrie $f_n\xrightarrow{PC} f$. Dacă $N(\varepsilon,x_0)$ nu depinde de x_0, adică $N(\varepsilon,x_0)=N(\varepsilon)$, atunci se spune că şirul $(f_n, n=1,2,\ldots)$ este *uniform convergent pe A către f* şi vom scrie $f_n\xrightarrow{UC} f$. Este important de precizat mulţimea pe care are loc punctual sau uniform convergenţa.

Rezultă că

$f_n\xrightarrow{UC} f$ pe A $\iff$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,N(\varepsilon)$ astfel încât $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ pentru orice $n\ge N(\varepsilon)$ şi orice $x\in A$.

De aici se deduce cu uşurinţă că

$f_n\xrightarrow{UC} f$ pe A $\iff$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,N(\varepsilon)$ astfel încât $\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ pentru orice $n\ge N(\varepsilon)$,

care la rândul său antrenează

$f_n\xrightarrow{UC} f$ pe A $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|=0$.

In acest fel avem trei forme echivalente de exprimare a convergenţei uniforme. De asemenea se observă că un şir de funcţii uniform convergent pe o mulţime este punctual convergent pe acea mulţime. Reciproca acestei afirmaţii este în general falsă după cum arată următorul exemplu clasic.

♣ **Exemplul 1.18.** Fie $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}, n=1,2,\ldots$

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & \text{pentru } x\in[0,\frac{1}{n}]\\ 2-nx & \text{pentru } x\in[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]\\ 0 & \text{pentru } x\in[\frac{2}{n},1]\end{cases}$$

Vom arăta că $f_n\xrightarrow{PC} f$ pe $[0,1]$. Intr-adevăr, este evident că $f_n(0)\to f(0)$, aşa că fie $x_0\in(0,1]$ arbitrar. Pentru n suficient de mare vom avea $\frac{2}{n}<$

$x_0 \Rightarrow f_n(x_0) = 0$ începând de la un anumit rang; deci $f_n \xrightarrow{PC} 0$ pe $[0,1]$. Pe de altă parte

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

care arată că şirul nu este uniform convergent către 0.

Observaţia 1.9. Conceptele de convergenţă expuse mai sus se transpun de o manieră evidentă pentru serii de funcţii întrucât convergenţa acestora revine la convergenţa şirului sumelor parţiale. De asemenea, definiţiile şi consideraţiile anterioare se extind pentru funcţii complexe de variabilă complexă.

Teorema 1.5. *(*Transfer de continuitate*) Fie* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$ *un şir de funcţii* continue *uniform convergent către funcţia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Atunci:*

1. *Funcţia f este de asemenea continuă*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ *(limita "comută" cu integrala).*

Demonstraţie. 1. Fie $x_0 \in [a,b]$ arbitrar. Deoarce $f_n \xrightarrow{UC} 0$ rezultă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru orice $n \geq N$ şi $x \in [a,b]$. Prin urmare vom avea:

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ (\forall)\ x \in [a,b] \tag{1.8}$$

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.9}$$

Deoarece f_N este continuă în x_0 rezultă că există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pentru orice } x \text{ cu proprietatea } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \tag{1.10}$$

Acum pentru $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ avem

$$|f(x) - f(x_0| \leq |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

conform cu (1.8), (1.9) şi (1.10).

2. Deoarece $f_n \xrightarrow{UC} f$ rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon) \text{ şi } x \in [a,b]. \tag{1.11}$$

Prin urmare

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon\ (\forall)\ n \geq N(\varepsilon)$$

conform cu (1.11) □

Corolarul 1.5. *Se consideră seria uniform convergentă de funcţii* continue $\sum u_n(x)$, $u_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *şi fie* s *suma sa. Atunci:*
1. Funcţia s *este continuă.*
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx$ *(suma infinită "comută" cu integrala).*

Demonstraţie. 1. Fie s_n, $n = 1, 2, \ldots$, şirul sumelor parţiale. Funcţiile acestui şir sunt continue (sume finite de funcţii continue) deci limita sa va fi continuă conform teoremei 1.5, pct. 1.
2. Relaţia

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b s_n(x)\,dx$$

rezultă din proprietatea de linearitate a integralei. Facem apoi $n \to \infty$ şi ţinem seama de teorema 1.5, pct. 2. □

Teorema 1.6. *(*Transfer de derivabilitate*) Fie* $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ *un şir de funcţii de clasă* $C^1[a,b]$, *iar* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Dacă* $f_n \xrightarrow{PC} f$ *iar* $f_n' \xrightarrow{UC} g$, *atunci funcţia* f *este derivabilă şi avem*$f' = g$.

Demonstraţie. Prin ipoteză

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$$

Pe de altă parte, din teorema 1.5, pct. 2, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$$

astfel că vom avea

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt$$

ceea ce arată că f este derivabilă şi $f' = g$. □

Corolarul 1.6. *Fie* $\sum u_n(x)$ *o serie de funcţii de clasă* $C^1[a,b]$, *punctual convergentă şi cu suma* S. *Presupunem că seria derivatelor* $\sum u_n'(x)$ *este uniform convergentă şi are suma* s. *Atunci funcţia* S *este derivabilă şi* $S' = s$.

Demonstraţie. Fie $S_n(x)$ şi $s_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, şirurile sumelor parţiale pentru seria dată şi respectiv pentru seria derivatelor. Funcţiile S_n sunt de clasă $C^1[a,b]$ (sume finite de funcţii de clasă C^1), iar prin ipoteză $S_n \xrightarrow{PC} S$ şi $s_n \xrightarrow{UC} s$. Astfel din teorema 1.6 rezultă concluzia dorită. □

Observaţia 1.10. Concluzia corolarului 1.6 poate fi exprimată prin relaţia

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

ceea ce arată că, în condiţiile din corolarul 1.6, operatorul de derivare "comută" cu suma infinită.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$, $u_n \colon A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ o serie de funcţii. Se spune că această serie este *dominată* pe A de seria numerică cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ dacă $|u_n(x)| \leq a_n$ pentru orice $x \in A$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$. Propoziţia următoare este, în multe cazuri, un instrument comod pentru demonstrarea uniform convergenţei unei serii de funcţii. Deocamdată o enunţăm fără demonstraţie urmând să revenim asupra ei în capitolul 2.

Propoziţia 1.12. *(*Criteriul lui Weierstrass) *Dacă seria de funcţii* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ *este dominată pe mulţimea A de seria numerică* convergentă $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$*, atunci seria de funcţii este uniform convergentă pe A.*

♣ **Exemplul 1.19.** 1. Seria de funcţii $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ este uniform convergentă pentru $x \in \mathbb{R}$ deoarece este dominată de seria numerică convergentă $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ (v. exemplul 1.4).

2. Considerăm seria geometrică $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x^n$, $|x| < 1$ a cărei sumă este $\frac{1}{1-x}$. Pentru orice $0 < r < 1$ seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$ deoarece este dominată de seria numerică convergentă (v. propoziţia 1.12) $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} r^n$. Prin urmare, pentru $0 < t \leq r$, conform corolarului 1.5, pct. 2, va rezulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n\, dx = \int_0^t \frac{dx}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t)$$

Dacă înlocuim pe t cu $-t$ şi schimbăm indicele de sumare se obţine relaţia

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = \ln(1+t),\ |t| < 1 \tag{1.12}$$

Pe de altă parte seria derivatelor seriei geometrice este $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} n x^{n-1}$ care este şi ea uniform convergentă pe $[-r, r]$ deoarece este dominată de seria numerică convergentă $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nr^{n-1}$ (v. propoziţia 1.6). Prin urmare, din corolarul 1.6 se obţine relaţia

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},\ |x| < 1 \tag{1.13}$$

3. Se consideră şirul de funcţii $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1], n = 1, 2, \ldots$. Este uşor de văzut că$f_n \xrightarrow{PC} 0$. Pentru a cerceta uniform convergenţa acestui şir observăm că funcţia f_n admite un maxim egal cu $\frac{1}{4}$ în punctul $x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$; aşadar $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{4}$, ceea ce arată că şirul nu este uniform convergent.

1.6 Serii de puteri

O serie de funcţii de forma $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ este numită *serie de puteri centrată în* z_0. Cu notaţia $z - z_0 = w$, se vede că vom putea să ne referim numai la serii de puteri centrate în origine de forma $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n w^n$ deoarece rezultatele obţinute se extind de o manieră evidentă pentru serii centrate într-un punct oarecare. Observăm că seria de puteri este convergentă pentru $z = z_0$.

In continuare ne vom referi la serii de puteri reale de forma $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, $a_n, x \in \mathbb{R}$, deşi rezultatele pe care le vom prezenta sunt valabile şi pentru serii de puteri complexe (v. [4], [24]).

Pentru o serie de puteri se pune problema determinării mulţimii sale de convergenţă.

Teorema 1.7. (Cauchy-Hadamard) *Presupunem că există* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \omega$ *şi fie* $R = \dfrac{1}{\omega}$ *(cu convenţia* $\dfrac{1}{0} = \infty$, $\dfrac{1}{\infty} = 0$*). Atunci:*
1. Pentru orice $x \in (-R, R)$ *(i.e.* $|x| < R$*) seria de puteri este convergentă.*
2. Pentru orice $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ *(i.e.* $|x| > R$*) seria de puteri este divergentă.*

Demonstraţie. Considerăm mai întâi cazul $0 < R < \infty$ (i.e. $0 < \omega < \infty$). Pentru $x \in (-R, R)$ fixat considerăm seria cu termeni pozitivi al cărei termen general este $u_n = |a_n||x|^n$ şi aplicăm criteriul rădăcinii (v. prop. 1.5); avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{a_n} = \omega|x|$$

Prin urmare, dacă $\omega|x| < 1$, seria este absolut convergentă, deci convergentă. Dacă, dimpotrivă, $\omega|x| > 1$, seria nu este absolut convergentă şi rămâne de arătat că nu este nici măcar convergentă în nici un punct $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Intr-adevăr, presupunem prin absurd că există $x_0 \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ astfel încât seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x_0^n$ este convergentă. Atunci, din proprietăţile generale ale seriilor, ar rezulta că şirul $(a_n x_0^n,\ n \in \mathbb{N})$ este convergent către zero, deci mărginit (v. prop. 1.2); fie deci $M > 0$ un majorant al acestui şir şi fie $R < |x| < |x_0|$. Avem

$$|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Cum seria cu termenul general $v_n = \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este convergentă (serie geometrică cu raţie subunitară), rezultă (v. prop. 1.4, pct. 1) că seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n|\,|x|^n$ este convergentă, ceea ce contrazice prima parte a demonstraţiei.

Fie acum $R = \infty \iff \omega = 0$; pentru orice $x \neq 0$, începând de la un anumit rang, vom avea

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{1 + |x|} \Rightarrow |a_n\, x^n| \leq \frac{|x|^n}{(1 + |x|)^n}$$

astfel că (v. prop. 1.4, pct. 1) seria $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n|\,|x|^n$ este convergentă (deci seria de puteri este absolut convergentă, deci convergentai).

Pentru cazul $R = 0$ (i.e. $\omega = \infty$) fie $x \neq 0$. Deoarece $\sqrt[n]{|a_n|} \to \infty$ va rezulta că, pentru o infinitate de termeni, avem

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|x|} \Rightarrow |a_n| \geq \frac{1}{|x|^n} \Rightarrow |a_n|\,|x|^n \geq 1$$

ceea ce arată că seria $\sum a_n\, x^n$ nu este absolut convergentă; pentru a arăta că nu este nici măcar convergentă se procedează ca în cazul $0 < R < \infty$. $\square$

Valoarea R poartă denumirea de *raza de convergenţă* a seriei de puteri. O serie de puteri centrată în punctul x_0 este convergentă pe mulţimea $(x_0 - R, x_0 + R)$ şi divrgentă pe $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.

Observaţia 1.11. 1. Teorema 1.7 nu precizează natura seriei de puteri în punctele $x = \pm R$.

2. Se poate arăta că (v. e.g. [3], [10], [21]), dacă $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nu există, atunci se poate lua $\omega = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

3. Un rezultat cunoscut despre şiruri ([13], [6]) arată că existenţa limitei $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \omega$ antrenează existenţa $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \omega$.

♣ **Exemplul 1.20.** 1. Se consideră seria de puteri $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Deoarece $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ rezultă că (teorema 1.7)

$$\omega = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \Rightarrow R = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Pentru $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ se obţine seria numerică cu termenul general $u_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-1}\right]^n$. Observăm că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-1} \geq 1$ astfel că şi $u_n \geq 1$, deci $u_n \not\to 0$. In acest fel rezultă că seria de puteri nu este comvergentă în punctele $x = \pm\frac{1}{\mathrm{e}}$; mulţimea de convergenţă este $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

2. Fie seria de puteri

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n-1}{n}\right) x^n$$

Avem $a_n = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n-1}{n}\right) \Rightarrow \cos a_n = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ deoarece $-\frac{\pi}{2} < a_n < \frac{\pi}{2}$. Folosind dezvoltările limitate putem scrie

$$\cos a_n = 1 - \frac{a_n^2}{2!} + a_n^2\epsilon(n) \text{ cu } \lim_{n\to\infty}\epsilon(n) = 0$$

Rezultă

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{n(1-2\epsilon(n))}}$$

de unde deducem imediat că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow R = 1$$

conform obs. 1.11.

Pentru $x = 1$ obţinem seria numerică cu termenul general $u_n = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n-1}{n}$ şi observăm că

$$\sin u_n = \cos\left(\arcsin\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$$

Prin urmare, deoarece $u_n \to 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{\sqrt{2n-1}}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\sin u_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{2}$$

ceea ce arată că seria $\sum u_n$ este divergentă conform cu propoziţia 1.4 şi observaţia 1.4. Pe de altă parte pentru $x = -1$ seria este convergentă aşa cum rezultă cu uşurinţă din corolarul 1.2. In concluzie mulţimea de convergenţă a seriei este $[-1, 1)$.

♠ **Exerciţiul 1.7.** Să se determine mulţimile de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

$$1.\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n^2}; \qquad 2.\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^{n^2}}{2^n}; \qquad 3.\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n; \qquad 4.\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{e^{nx}}.$$

Teorema 1.8. *Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă R, iar $0 < r < R$. Avem:*
1. Seria de puteri este uniform convergentă pe $[-r, r]$.
2. Seria de puteri poate fi derivată şi integrată termen cu termen pe $[-r, r]$.

Demonstraţie. 1. Seria numerică $\sum |a_n| r^n$ este convergentă (v. demonstraţia teoremei 1.7) şi domină seria de puteri pe $[-r, r]$ (v. prop. 1.12).
2. Seria derivatelor este $\sum n a_n x^{n-1}$ şi, deoarece

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

ea are aceeaşi rază de convergenţă cu seria dată (v. obs. 1.11, pct. 2). Astfel demonstraţia este o consecinţă a corolarelor 1.5 şi 1.6. □

Teorema 1.9. *Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty[a, b]$, şi $x_0 \in (a, b)$. Presupunem că există $M > 0$ astfel încât $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice x într-o vecinătate V a punctului x_0 (centrată în x_0). Atunci*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \tag{1.14}$$

Demonstraţie. Conform corolarului 1.1, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in V$ există $\xi \in V$ astfel încât

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Se observă apoi că

$$\left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq M \frac{(b - a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ când } n \to \infty$$

□

Corolarul 1.7. *In condiţiile teoremei 1.9, dacă $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, avem*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \tag{1.15}$$

Relaţiile (1.14) şi (1.15) reprezintă *dezvoltarea funcţiei f în serie Taylor în jurul punctului x_0*, respectiv *dezvoltarea funcţiei f în serie Mac Laurin.*

♣ **Exemplul 1.21.** Prezentăm dezvoltările clasice în serie Mac Laurin şi mulţimile de convergenţă corespunzătoare.

1. $\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}$

2. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \cdots,\ x \in (-1,1)$

3. $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots,\ x \in (-1,1)$

4. $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}$

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}$

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,\ x \in (-1,1),\ (\alpha \notin \mathbb{Z})$$

♠ **Exerciţiul 1.8.** Să se dezvolte în serie Mac Laurin următoarele funcţii, precizându-se mulţimea de convergenţă:

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$; 2. $f(x) = \sin^3 x$; 3. $f(x) = \dfrac{x^{10}}{1-x}$;

4. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 5. $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$; 6. $f(x) = \arccos(1-2x^2)$.