MÉTODO SIMPLEX
MÉTODO DE SOLUCIÓN GRÁFICO

AVISO

- Traer para la siguiente clase laptop para desarrollar ejercicios con winqsb, tora, qsb, y otros.

Ejemplo. Dieta Marina

Minimización

Dieta Marina

- Un problema de minimización del costo de la dieta:
- Mezcle dos porciones de lo productos: Texfoods, Calration.
- Minimice el costo total de la mezcla.
- Mantenga los requerimientos mínimos de Vitamina A, Vitamina D, y hierro.

Variables de decisión:

x1 (X2) - - El cantidad de Texfoods (Calration) se usó en

cada porción (cada 2 onzas).

Costo por 2 oz.

- El modelo

minimizar 0.60X1 + 0.50X2

sujeto a

% Vitamina A por 2 oz.

$$20X1 + 50X2 \geq 100$$

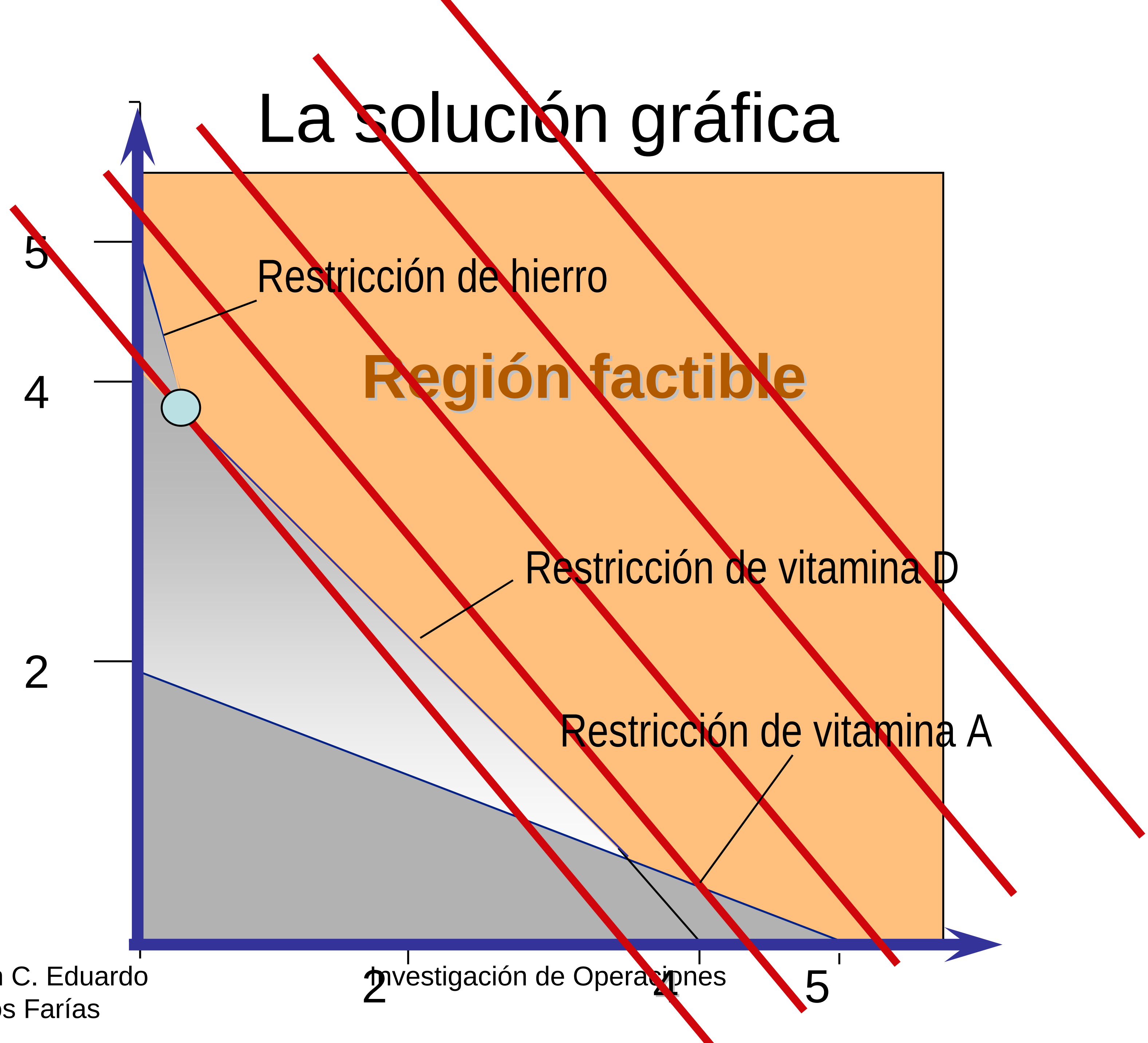
$$25X1 + 25X2 \geq 100 \quad \text{Vitamina D}$$

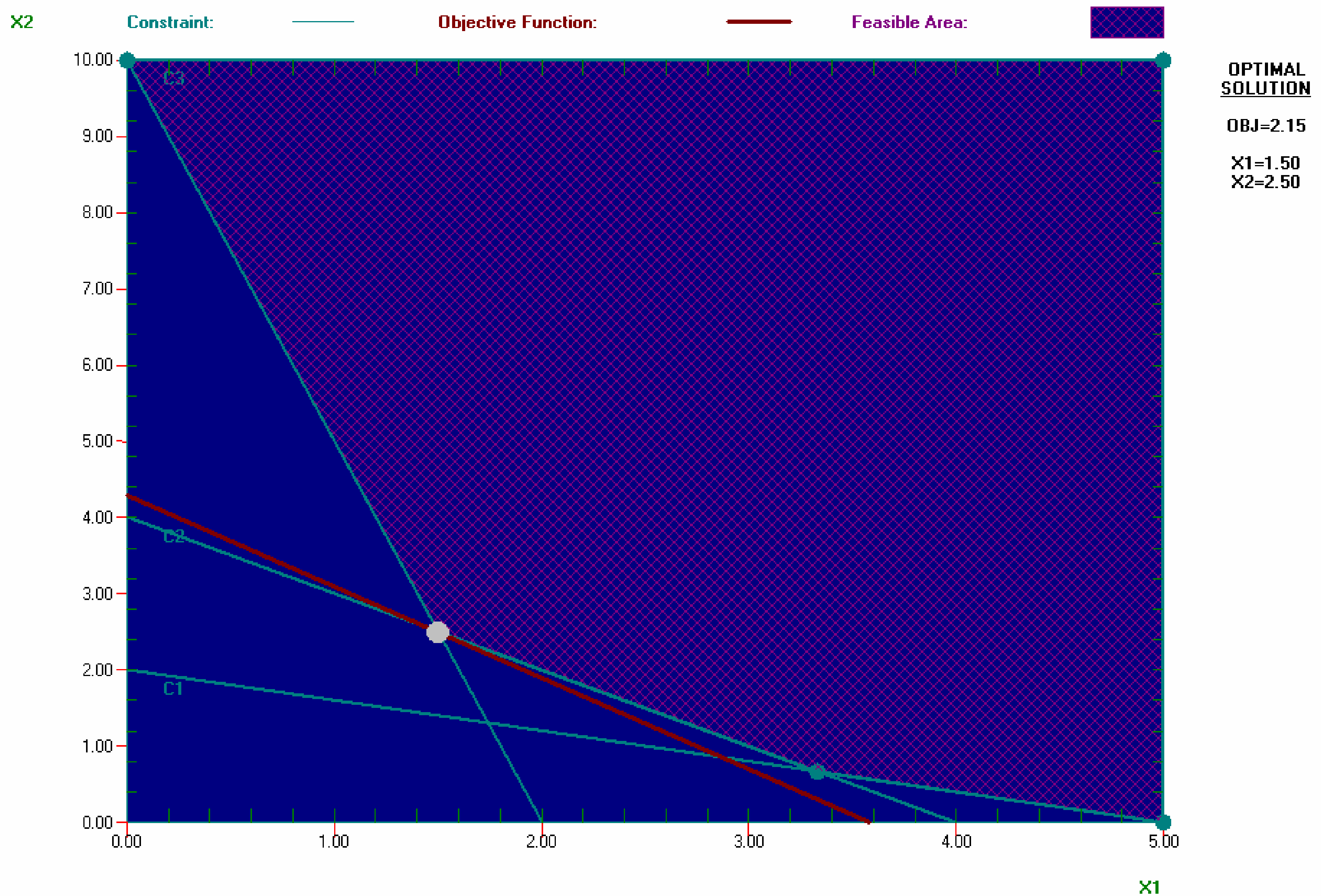
% requerido

$$50X1 + 10X2 \geq 100 \quad \text{hierro}$$

$$X1, \; X2 \qquad 0$$

La solución gráfica




X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
C3
C2
C1
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
X1
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=2.15
X1=1.50
X2=2.50

✓Resumen de la solución óptima

- Producto Texfood = repartir 1.5 (= 3 onzas)
- Producto Calration = repartir 2.5 (= 5 onzas)
- Costo =$ 2.15 por porción.
- El requisito mínimo para la Vitamina D y el hierro no se encuentren en superávit.
- La mezcla provee 155% del requerimiento para Vitamina A.

Tipos de soluciones en problemas de PL

- Solución óptima finita única.
- Solución óptima finita múltiple.
- Solución ilimitada.
- Solución infactible.
- Solución inexistente.

Solución óptima finita única

Este tipo de soluciones es la más común una vez que el modelo ha sido formulado y orientado correctamente a problemas reales de PL. Se llama *óptima* por ser la mejor de las soluciones factibles; *finita* porque tanto las variables como el objetivo toman valores finitos; y *única* porque sólo hay una combinación de valores para las variables que, cumpliendo con las restricciones tecnológicas y las condiciones técnicas, optimizan el valor de x_0. Dado que no tiene sentido hablar de una solución óptima infinita, a menudo su nombre se reduce a *solución óptima única*. En el ejemplo 6.2, se ilustra una solución de este tipo.

Ejemplo 6.2 Ilustración de una solución finita única

Considere el siguiente problema

maximizar: $Z = 2x_1 + x_2$

sujeta a:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 &\leq 20 \quad &①\\
-x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad &②\\
4x_1 - 3x_2 &\leq 8 \quad &③\\
x_1, x_2 &\geq 0 \quad &④
\end{aligned}
$$

Resuélvalo por el método gráfico

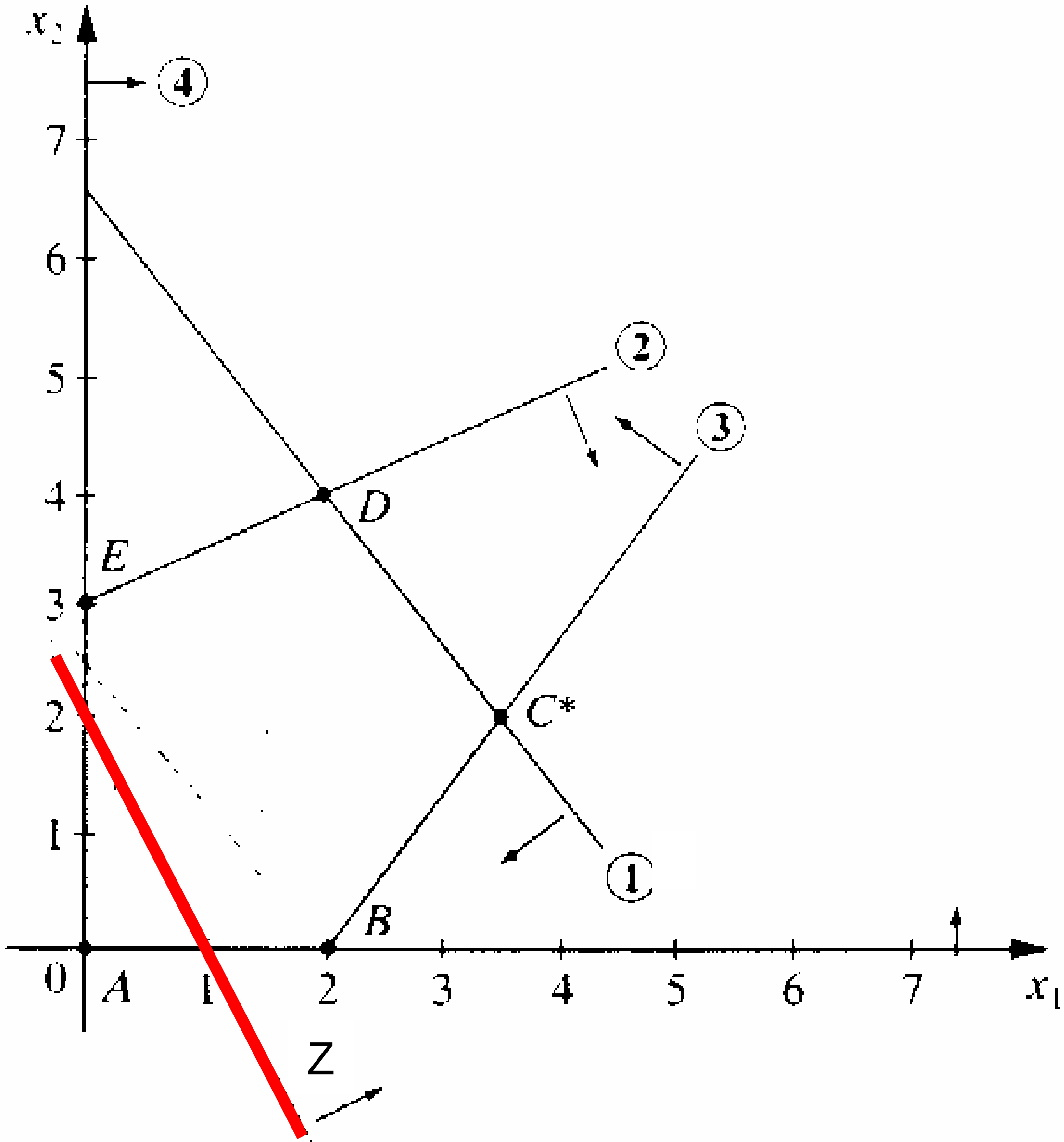


Figura 6.10 Solución óptima finita única (ejemplo 6.2)

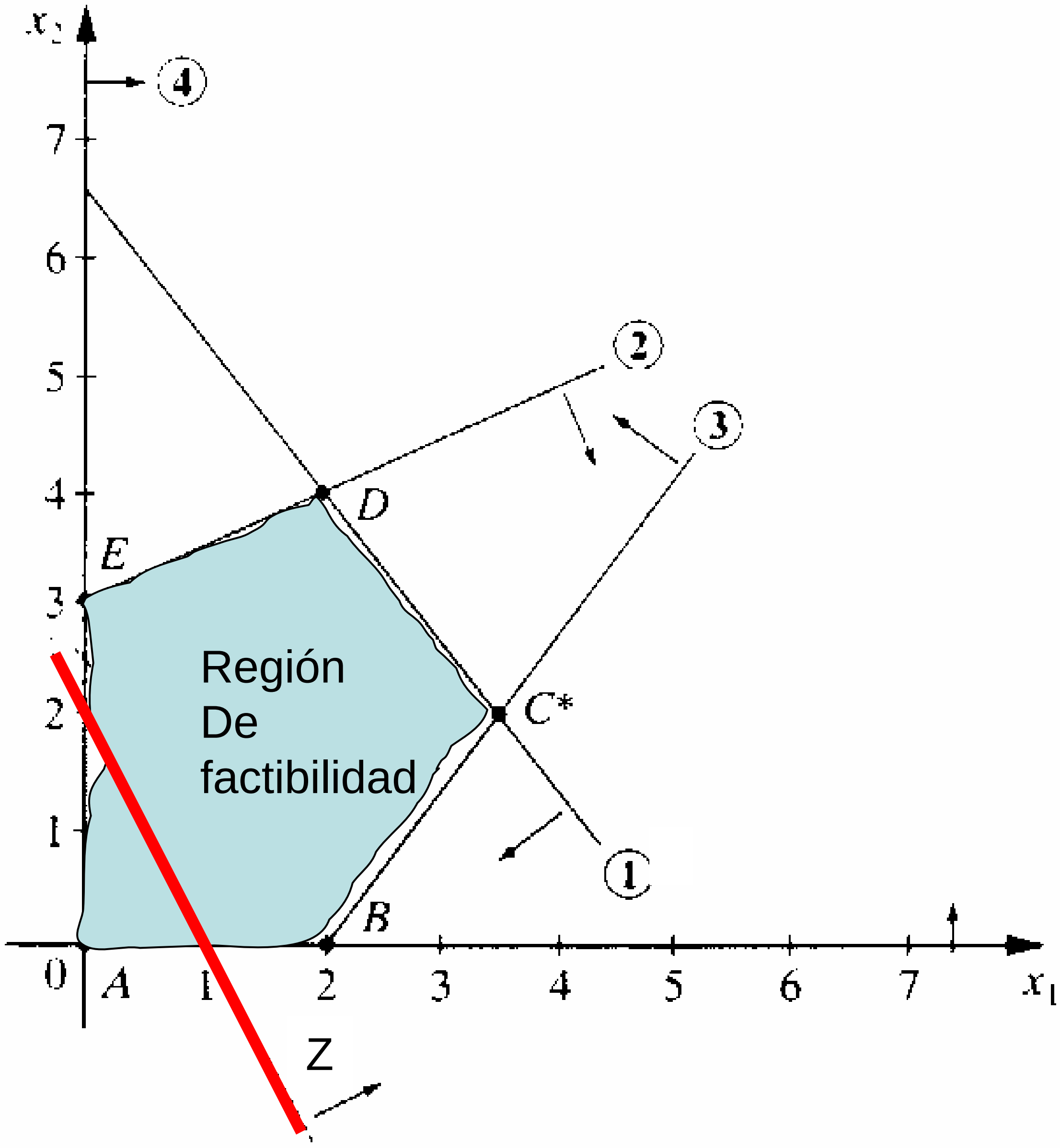


Figura 6.10 Solución óptima finita única (ejemplo 6.2)

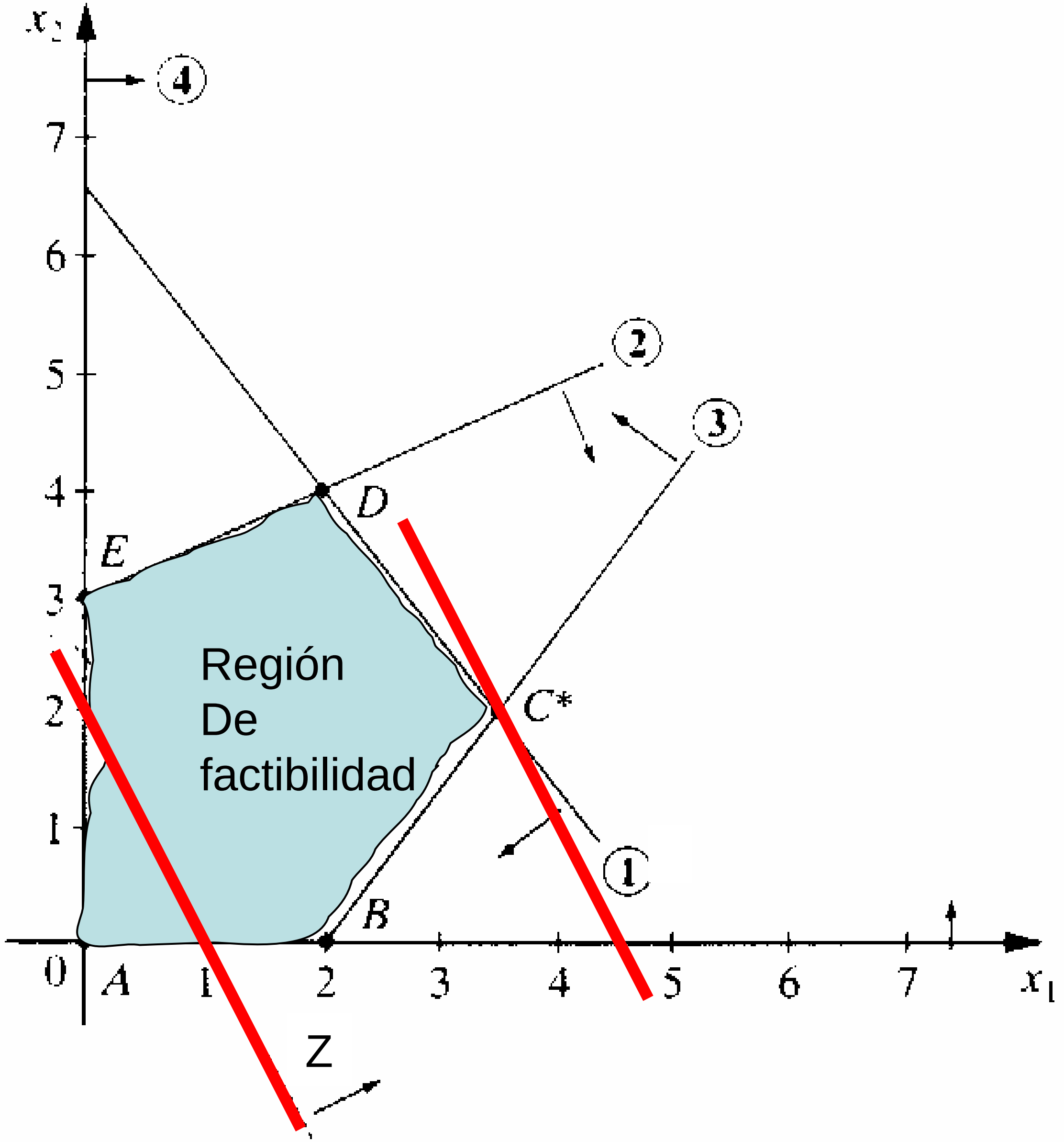


Figura 6.10 Solución óptima finita única (ejemplo 6.2)

6.2.3 Solución ilimitada

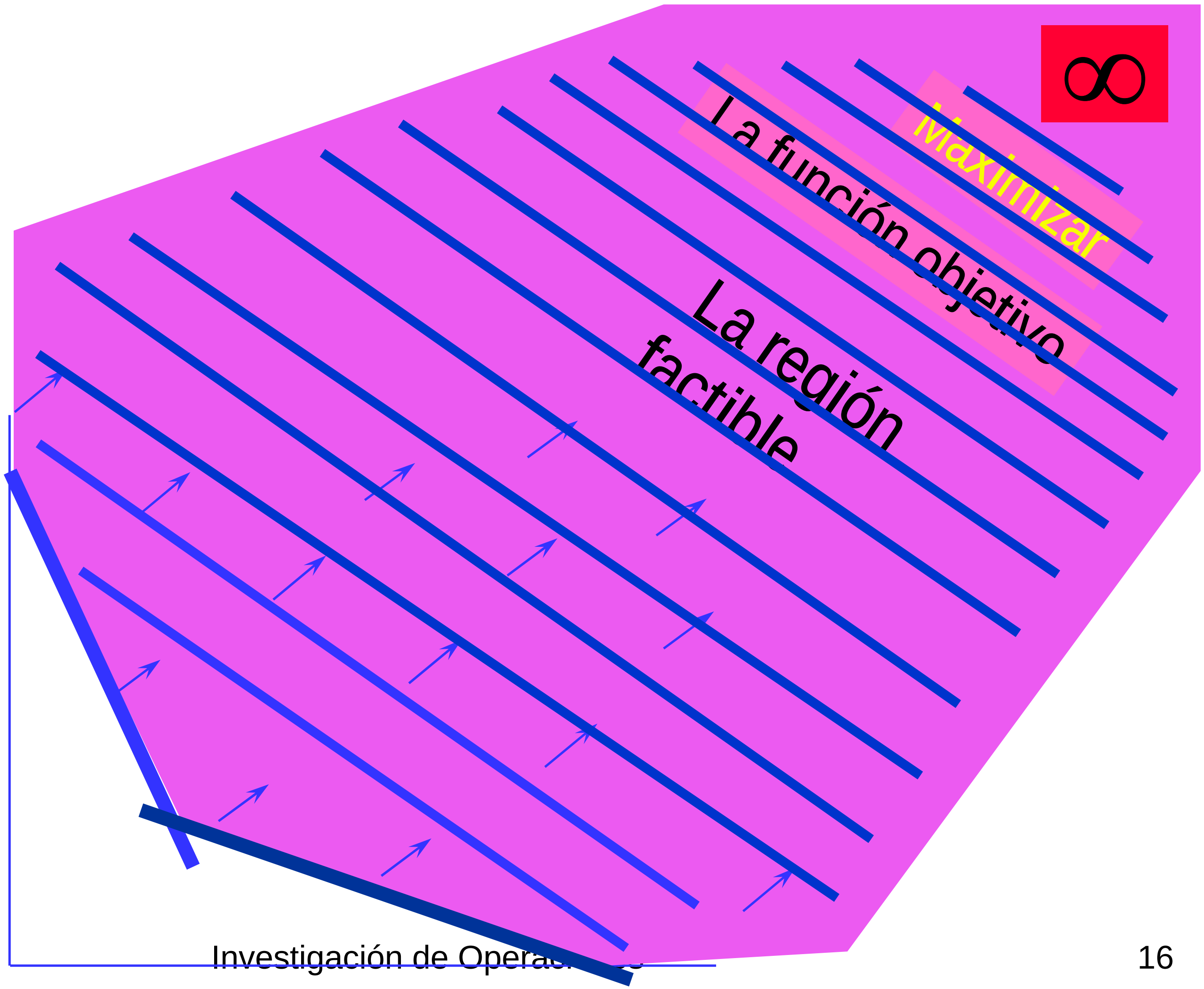
Esta solución surge cuando una o más de las variables, así como el valor de la función objetivo toman un valor ilimitado o infinito sin violar alguna de las restricciones estructurales. No debemos esperar que algún tipo de problema real de PL tenga este tipo de solución, por lo que ésta puede presentarse por una o varias de las siguientes causas:

1. Omisión de una o más restricciones.
2. Fallas en la modelación y la formulación.
3. Errores en los datos de entrada al método de solución.

Dado que puede ocurrir en la práctica, por las causas anteriormente expuestas, el estudiante debe familiariazarse con ella. Se exhibe un problema con este tipo de resultado en el ejemplo 6.4.

Note que una condición necesaria, mas no suficiente, para que un problema posea solución ilimitada, es que la región factible sea un conjunto no acotado

Solución No Acotada



Ejemplo 6.4 Ilustración de una solución ilimitada

Sea un problema

$$\text{maximizar:} \quad Z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{sujeta a:} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 & \text{①} \\ x_1 - 3x_2 &\leq 2 & \text{②} \\ x_1 - x_2 &\leq 3 & \text{③} \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 & \text{④} \\ \\ x_1, x_2 &\geq 0 & \text{⑤} \end{aligned}$$

En la siguiente figura se hace una representación gráfica de este problema. La región factible generada por las restricciones y condiciones es no acotada. Se define por el punto A y las semirrectas S_1 (con vértices en el punto C) y S_2 (con vértice en el punto B). La función objetivo puede moverse, tanto como se desee, en la dirección de mejoría; entonces, las dos variables, así como el objetivo, pueden tomar valores infinitos. En conclusión, este problema tiene una solución ilimitada.

Resuélvalo por el método gráfico

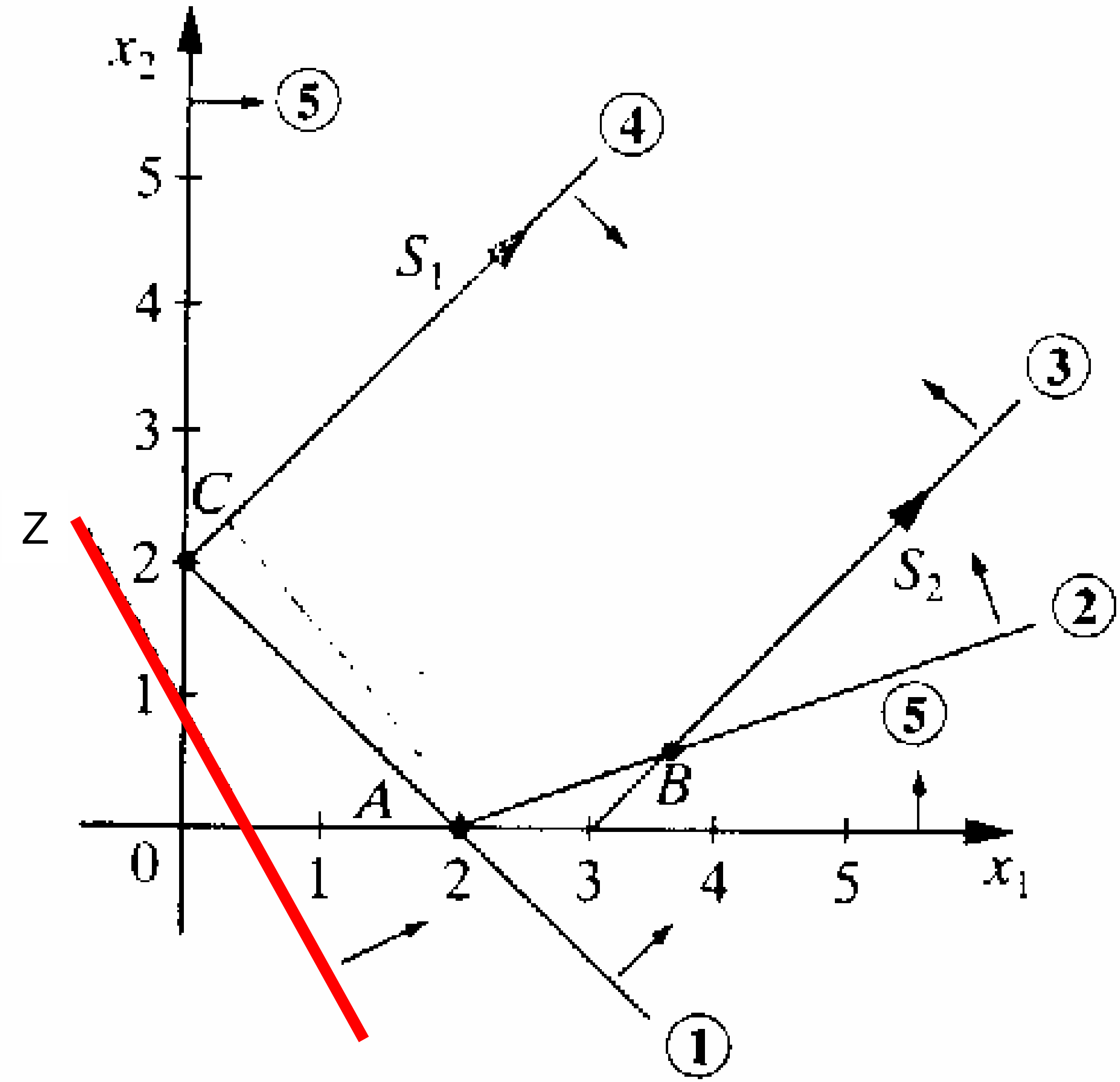


Figura 6.12 Solución ilimitada (ejemplo 6.4)

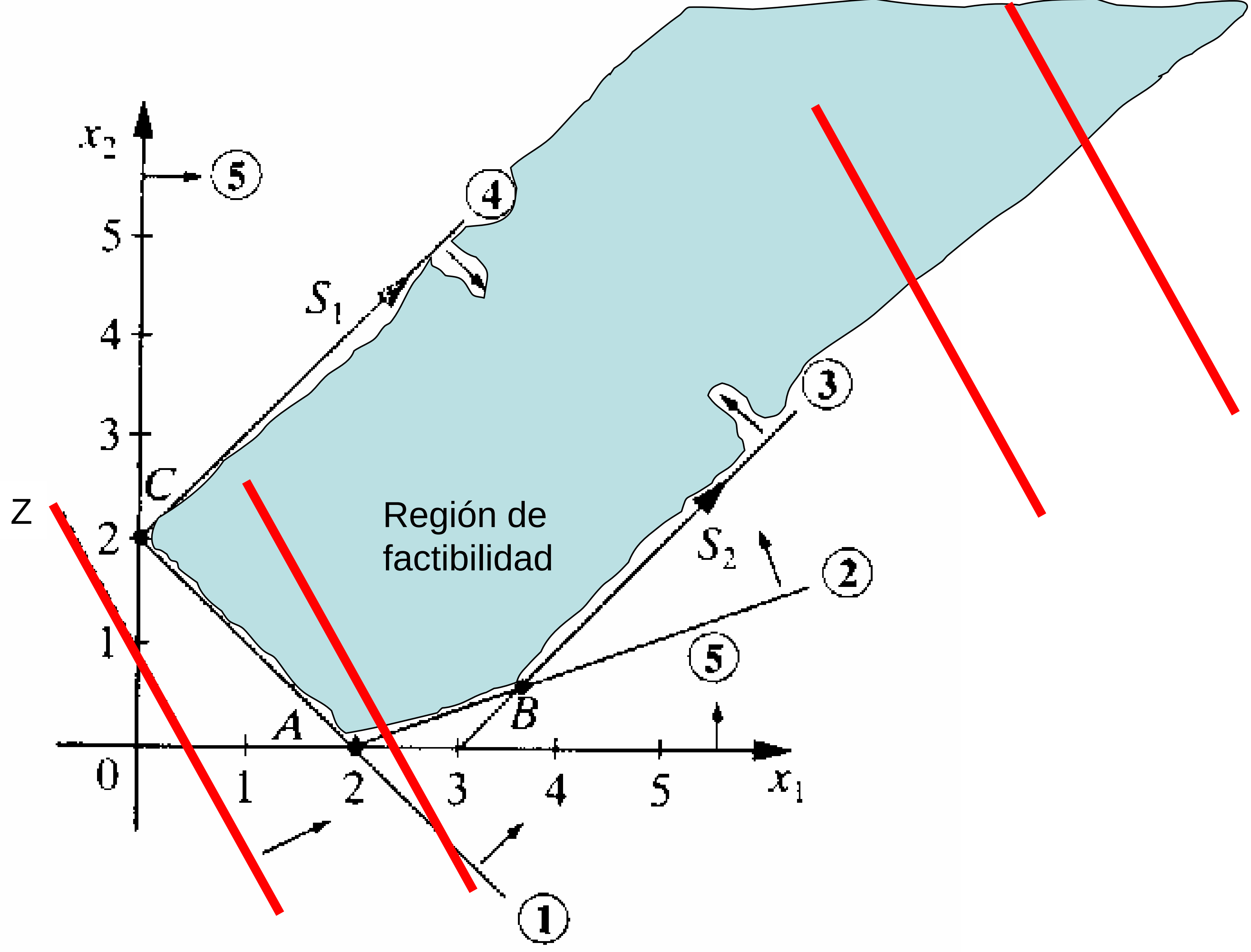


Figura 6.12 Solución ilimitada (ejemplo 6.4)

6.2.4 Solución infactible

Se dice que un problema de PL tiene una solución infactible cuando se pueden encontrar una o más soluciones que cumplen con todas las restricciones estructurales, pero no con las condiciones de no negatividad. Geométricamente, su espacio solución cae fuera de la ortante positiva.

Tampoco debemos esperar, como en el caso de solución ilimitada, que un problema real detente este tipo de solución. Sin embargo, las causas de su aparición son, en cierta medida, diferentes:

1. Formulación de restricciones en conflicto, la mayoría de las veces. Esto significa que varias restricciones no pueden satisfacerse simultáneamente.
2. Fallas en la modelación y la formulación.
3. Errores en los datos de entrada al método de solución.

Recomendamos estudiar detenidamente este tipo de solución. En el ejemplo 6.5 se expone un problema con solución infactible.

Evidentemente, cuando un problema manifiesta una solución infactible, el concepto de solución óptima se invalida, es decir, que no puede existir. Por tanto, la función objetivo pasa a ser irrelevante.

Infactibilidad

Ningún punto se encuentra, simultáneamente, sobre la línea 1 la línea 2 y 3

Ejemplo 6.5

- Considere el siguiente problema (solución infactible):

Max $Z=2x1+3x2$

Sujeta a:

$-x1-x2>=1$…(1)

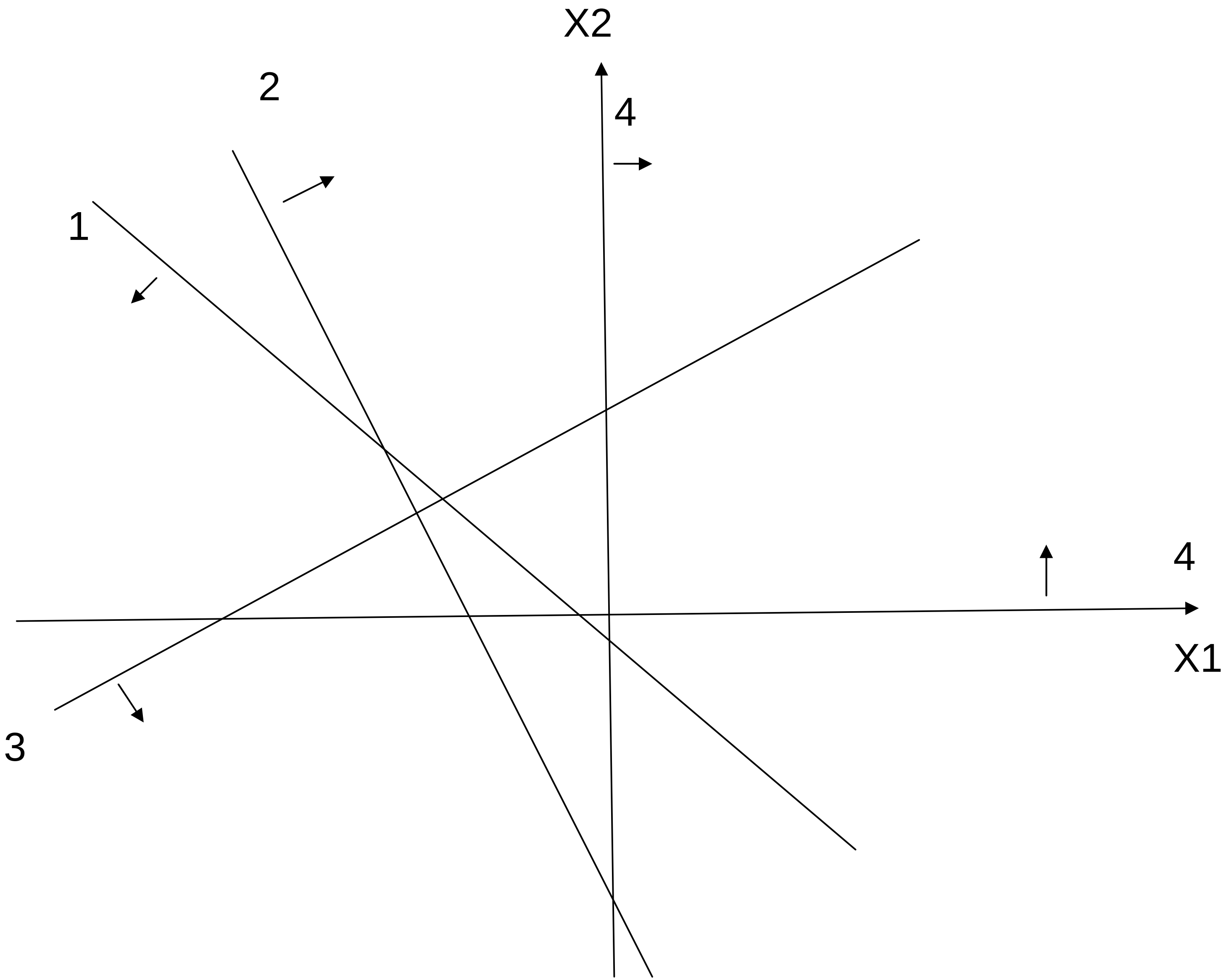
$-8x1-4x2<=16$…(2)

$-3x1+4x2<=12$…(3)

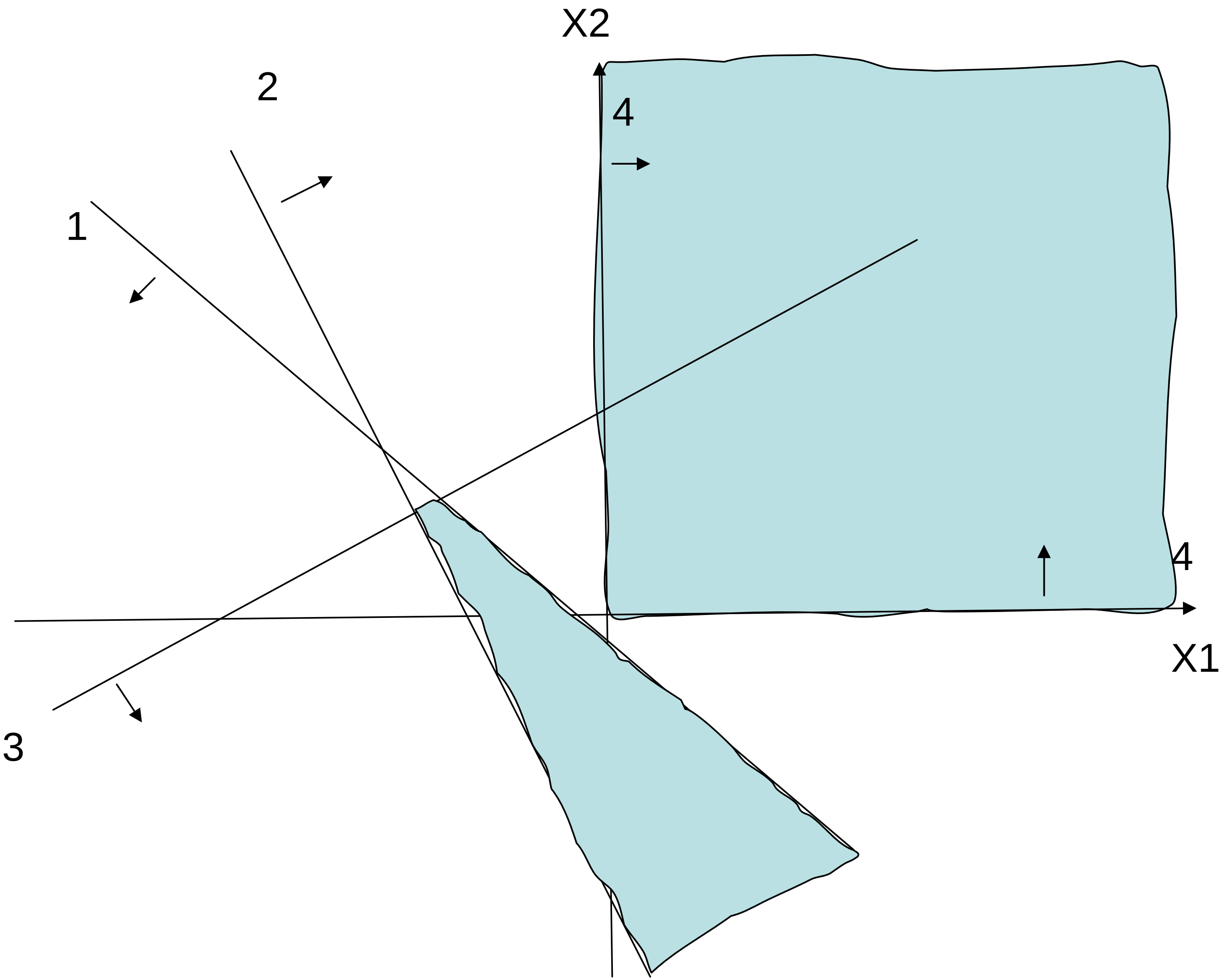
$X1,x2 >=0$…(4)

Resuélvalo por el método gráfico

Solución infactible



Solución infactible



6.2.5 Solución inexistente

Ésta es la última clase de solución que puede presentarse al resolver un problema de PL, razón por la cual debe tomarse con detenimiento. La solución inexistente ocurre cuando no pueden satisfacerse las restricciones estructurales ni las condiciones técnicas. Se considera una situación extrema cuando no hay números reales (ya sea positivos, negativos o cero) que puedan cumplir con las restricciones tecnológicas. Obviamente, las condiciones de no negatividad y el objetivo, pierden sentido. En este caso, no podemos hablar de solución óptima.

La solución inexistente, al igual que la ilimitada y la infactible, no debe aparecer en un problema real de PL; su presencia se debe a alguna de las siguientes causas:

1. Fallas en la modelación y la formulación.
2. Errores en los datos de entrada al método de solución.

En cierto sentido, podemos establecer que la solución inexistente es un estado extremo de la solución infactible y muchos autores no hacen ninguna diferencia entre ellas y las agrupan bajo el nombre de solución infactible. En este libro serán tratadas por separado, puesto que la solución inexistente indica necesariamente un error en el manejo de la información del problema real, mientras que la solución infactible surge generalmente de la presencia de restricciones en conflicto. El hecho de discernir ambas soluciones brinda al analista un elemento adicional para subsanar la dificultad que se presenta cuando se confrontan.

Por último, y dado que los autores optarán por diferenciar entre la solución infactible y la solución inexistente, cuando sea necesario hacer referencia a ambas soluciones con un solo término, se denotarán por *soluciones inconsistentes*. Un problema con solución inexistente se muestra en el ejemplo 6.6.

Ejemplo 6.6 Solución inexistente

- Sea el siguiente problema:

Minimizar Z= 3x1-2x2

Sujeta a:

2x1+2x2<=4…(1)

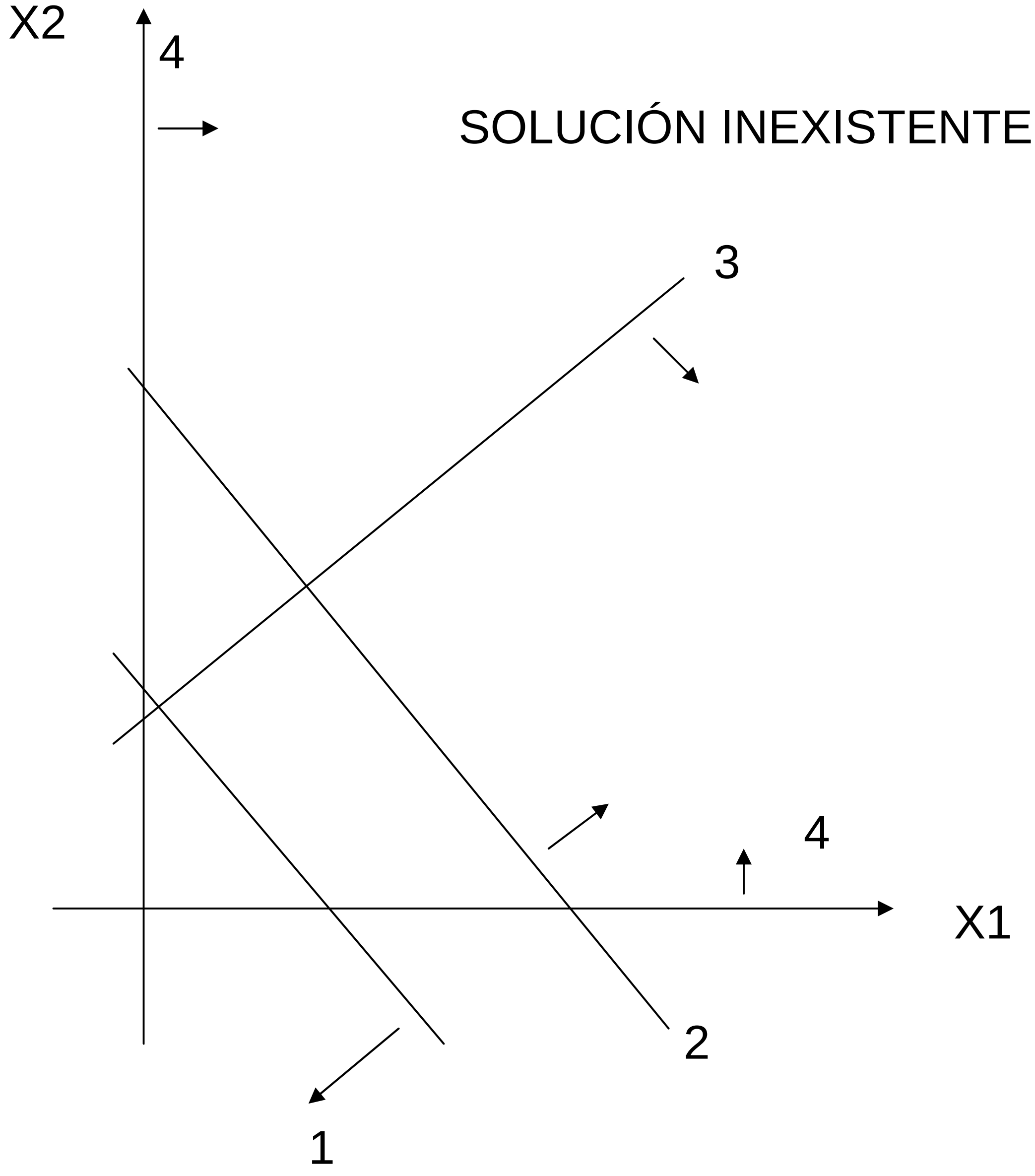
X1+x2>=4…(2)

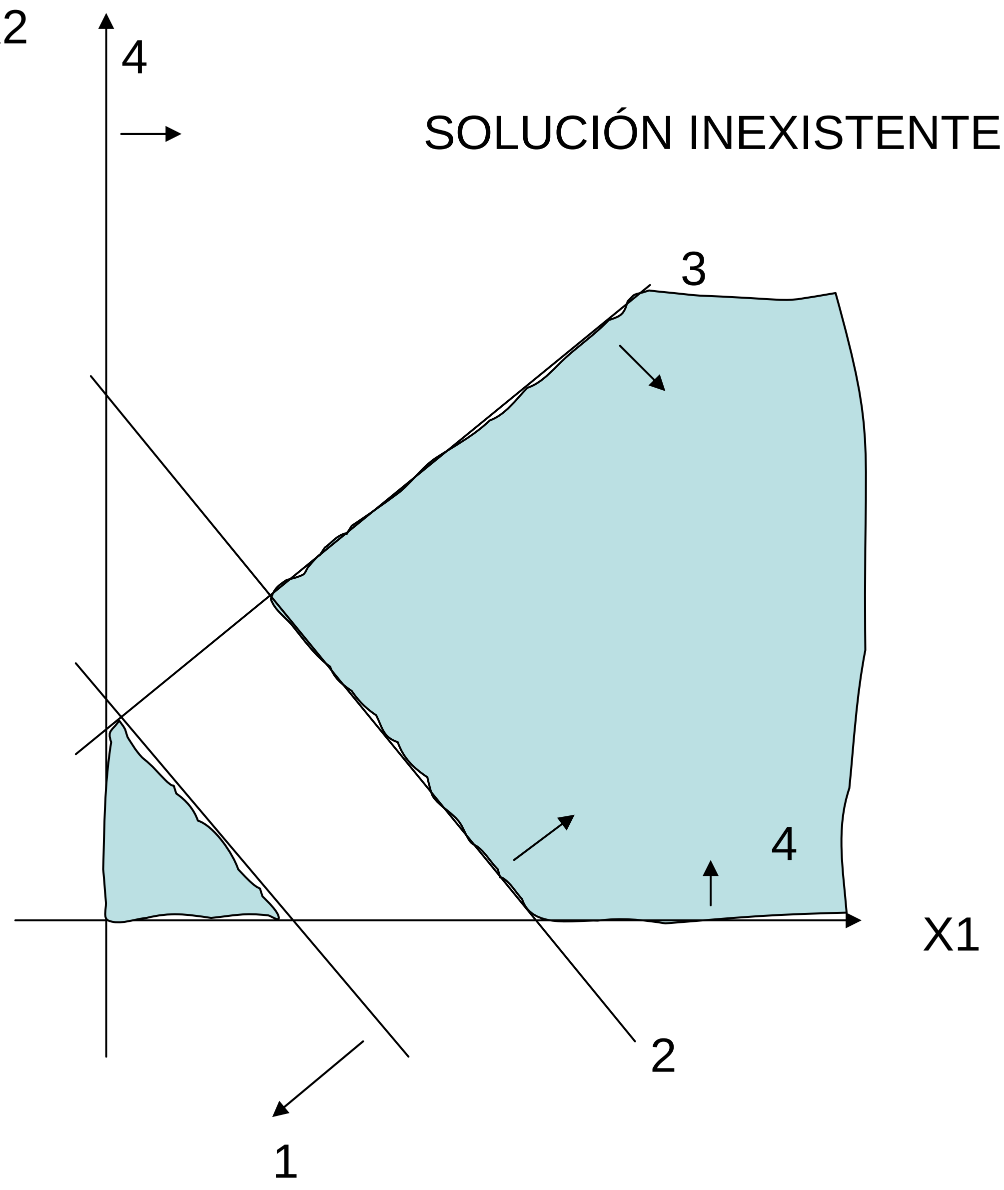
-3x1+3x2<=3…(3)

X1,x2 >=0…(4)

Resuélvalo por el método gráfico

SOLUCIÓN INEXISTENTE




X2
4
SOLUCIÓN INEXISTENTE
3
4
X1
2
1

6.2.2 Solución óptima finita múltiple

Cuando la isocuanta v_0 se transporta hacia su dirección de mejoría y el último contacto con la región factible no se realiza en un punto, sino en uno de los lados del polígono (hiperplanos de un poliedro en más de tres dimensiones), todos los puntos que integran tal lado o segmento de recta son soluciones óptimas. Dado que toda recta o segmento de ella se considera conformada por un número infinito de puntos, podemos afirmar que se ha encontrado un número infinito de soluciones óptimas. Para no confundirnos con el término *infinito*, preferimos designarla como una *solución óptima múltiple*. El término *finito* conserva el mismo significado que en la solución anterior y por la misma razón, se omite en la mayoría de los casos. En el ejemplo 6.3 se expone este tipo de solución.

La solución óptima múltiple no es tan frecuente en la práctica como lo es la solución óptima única. Aquí se cumple el adagio que dice: *De lo bueno poco*,

la solución óptima múltiple provee una gran flexibilidad al tomador de decisiones. Incluso podemos asegurar que con este tipo de solución óptima, el tomador de decisiones tiene la oportunidad de "diseñar su propia solución óptima".

Debemos advertir que una condición necesaria, mas no suficiente, para que ocurra la solución óptima múltiple, es que la función objetivo sea paralela a una de las restricciones o una combinación lineal de las mismas.

Ejemplo 6.3 Ilustración de una solución óptima finita múltiple

Suponga el siguiente problema

$$\text{maximizar:} \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\text{sujeta a:} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 && ① \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 12 && ② \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 2 && ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 && ④ \end{aligned}$$

Resuélvalo por el método gráfico

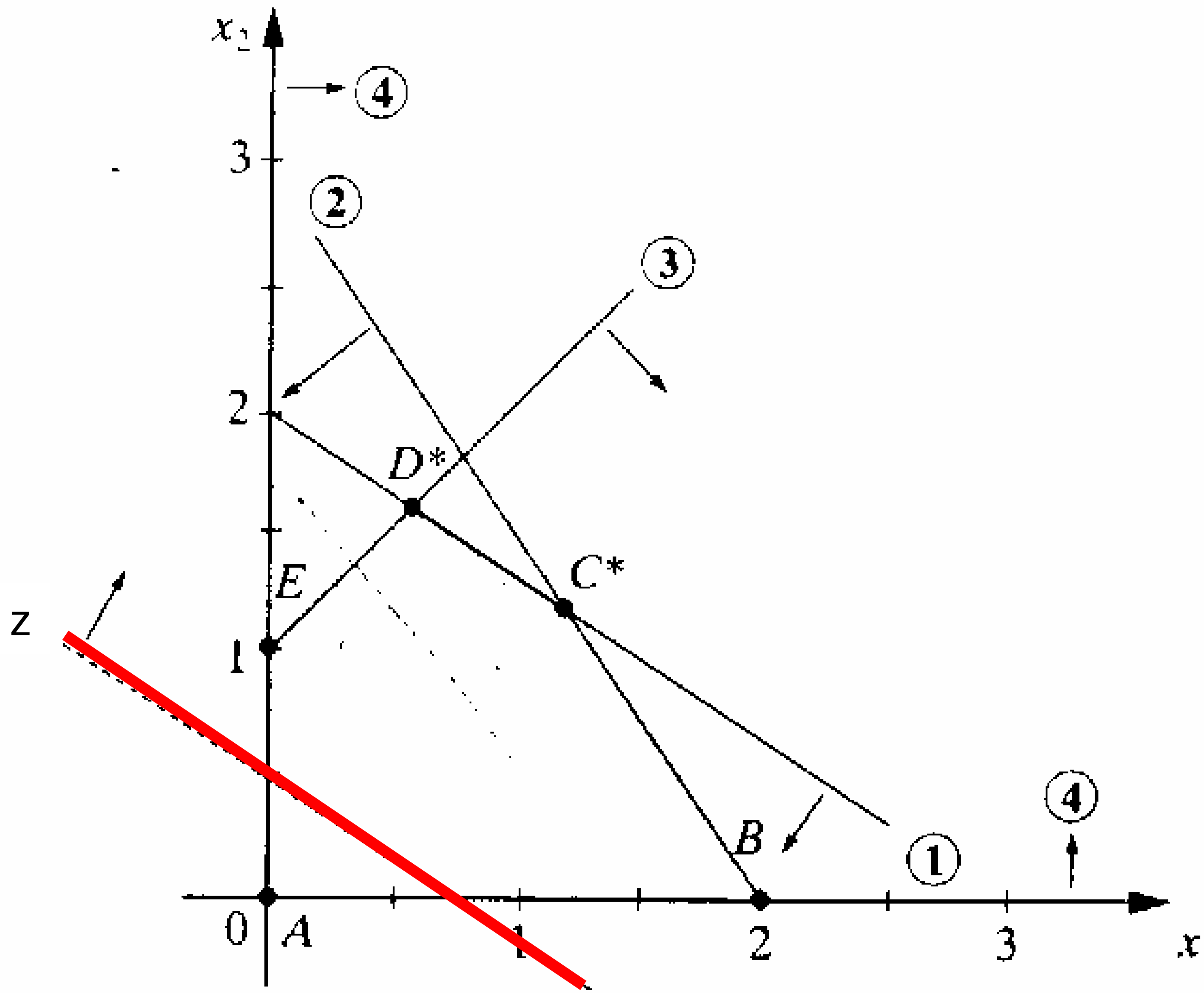


Figura 6.11 Solución óptima finita múltiple (ejemplo 6.3)

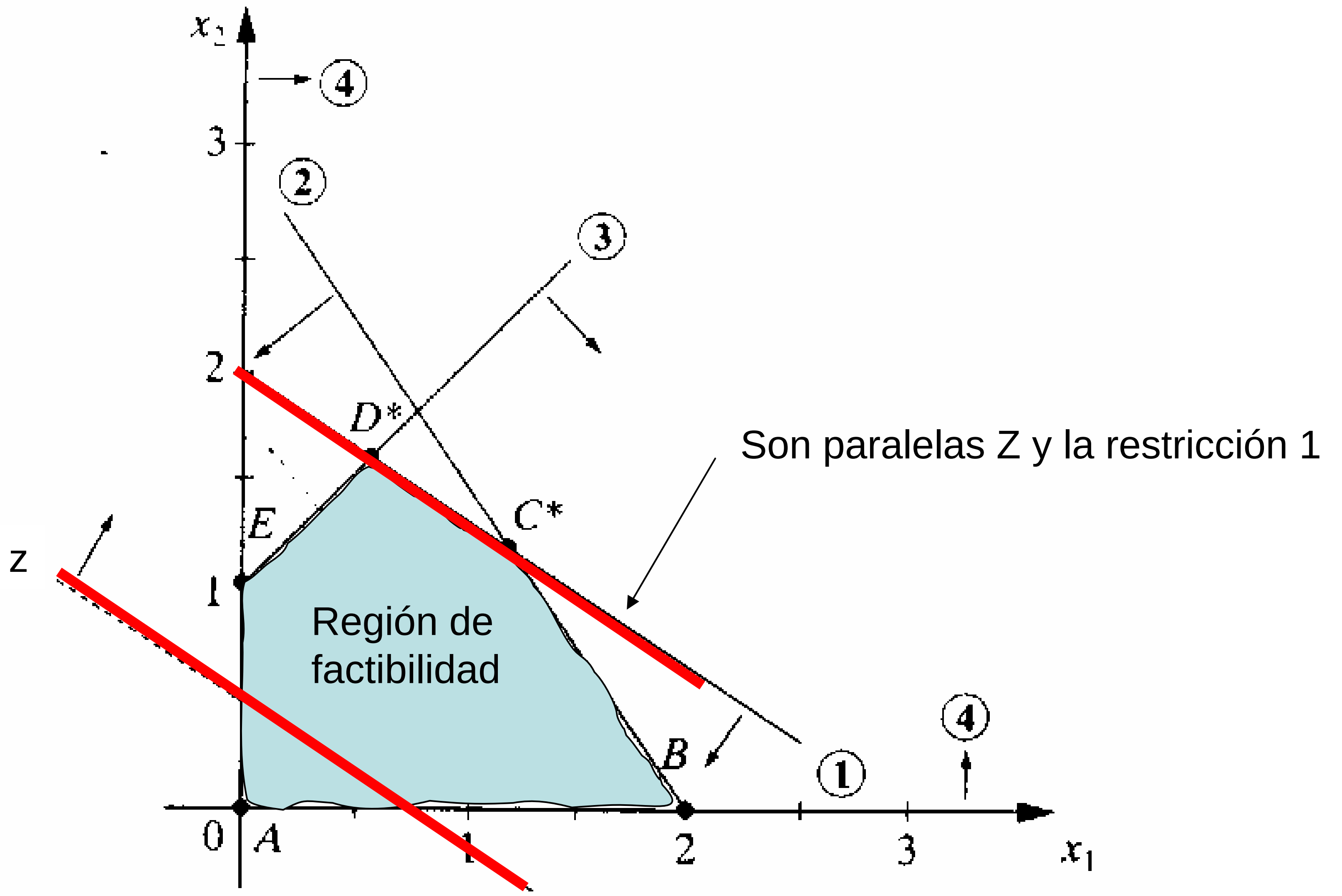


Figura 6.11 Solución óptima finita múltiple (ejemplo 6.3)

Ejemplo. Breeding Manufacturing Inc.

Mezcla de productos

Para el problema su modelo de programación lineal es:

MAXIMIZAR: $Z = 50x1 + 75x2$

SUJETO A:

$3.6X1 + 4.8\ X2 <= 4800$

$1.6X1 + 1.8\ X2 <= 1980$

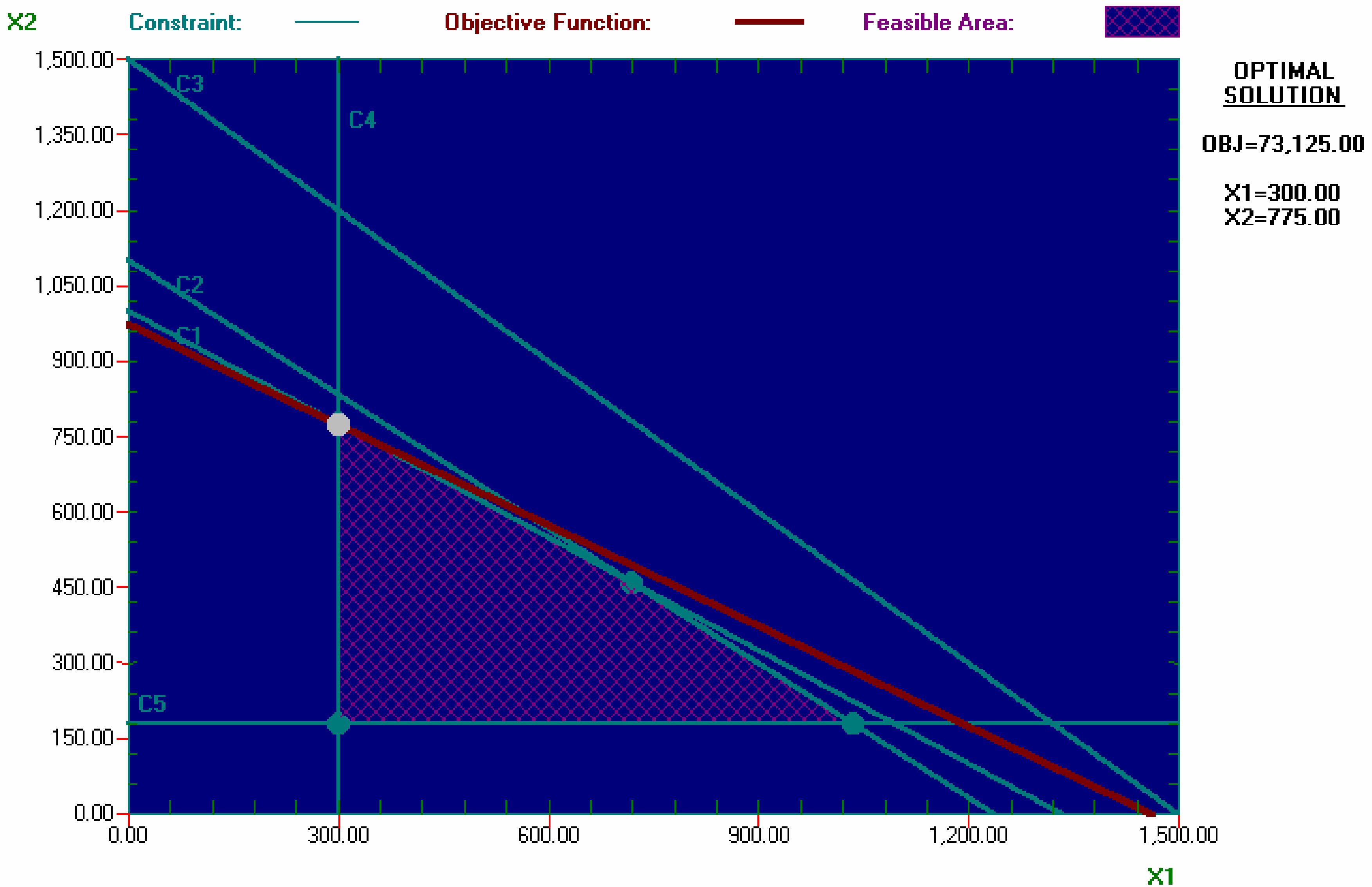
$0.6X1 + 0.6x2 <= 900$

$X1 >= 300$

$X2 >= 180$

$x1, x2 >= 0$

Resuélvalo por el método gráfico



X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
1,500.00
1,350.00
1,200.00
1,050.00
900.00
750.00
600.00
450.00
300.00
150.00
0.00
C3
C4
C2
C1
C5
0.00
300.00
600.00
900.00
1,200.00
1,500.00
X1
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=73,125.00
X1=300.00
X2=775.00