EL MÉTODO SIMPLEX ALGEBRAICO: MINIMIZACION

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Minimización

El método simplex puede aplicarse a un problema de minimización si se modifican los pasos del algoritmo:

1. Se cambia la prueba de optimalidad, de manera que el proceso de solución continúa hasta que todos los valores del renglón Cj-Zj sean cero o positivos.

2. La variable que entra es la que tiene el valor Cj-Zj más negativo.

O bien,

Puede convertirse un problema de minimización en uno de maximización simplemente:

1. Multiplicando los coeficientes de la función objetivo del problema de minimización por –1
2. Cambiando el sentido de las desigualdades.

Técnica de variables artificiales

En general se recurre a las variables artificiales cuando al menos una de las restricciones en el modelo original es del tipo >=, esto con el fin de obtener la solución básica factible inicial.

Las variables artificiales proporcionan un mecanismo matemático para obtener una primera solución básica.

El efecto de estas variables en la solución final es cancelado por el valor de la penalización muy alta en la función objetivo.

Estas variables son ficticias y no tienen una interpretación física directa en términos del problema original.

Pasos:

1. Expresar el modelo original en la forma estándar o tabular y llevarlo preferentemente a un problema de maximización multiplicándolo por –1.

2. Sumar del lado izquierdo de cada ecuación, correspondiente a las restricciones del tipo >= una variable no-negativa.

Estas variables se llaman variables artificiales y su adición causa una alteración en las restricciones.

Esta dificultad es superada garantizando que las variables artificiales sean igual a 0 en la solución final, lo cual se consigue asignando un valor muy alto o grande a dichas variables.

Pasos:

(-M para un problema de maximización o + M para un problema de minimización). Con M >0.

3. El uso de las variables artificiales proporciona una solución inicial básica.
4. Proceder con los pasos normales del método simplex.

Algoritmo del Método de la Gran M

1. Pasar a la forma estándar el modelo matemático.
2. Agregar variables artificiales en las ecuaciones que no tienen variables de holgura.
3. Se deben penalizar a las variables artificiales en la función objetivo asignándoles coeficientes positivos muy grandes. Sea M un número muy grande. (En los modelos de Minimización la penalización para cada variable artificial se suma y en los de Maximización se restan).
4. En la función objetivo no deben aparecer variables básicas por lo que se hace necesario eliminar las variables artificiales de la F.O.(Quitar las "M" de las columnas de las artificiales).

Algoritmo del Método de la Gran M

5. Con la solución inicial artificial se aplica el método simplex de la forma acostumbrada generando las tablas necesarias para llegar a una solución.

N**otas:**

- Cuando una solución contiene variables artificiales básicas igual a cero entonces la solución sí es factible con respecto al problema original.
- Si el problema no tiene solución factible, cuando menos una variable artificial será positiva en la solución óptima.

EL CASO DE LA MINIMIZACIÓN: QUÍMICA SIGMA S.A.

- La empresa química SIGMA S.A. manufactura dos productos que se venden como materia prima a compañías que fabrican jabones para baño, detergentes y otros productos.
- Con base en un análisis de los niveles actuales de inventario y de la demanda potencial para el siguiente mes, los administradores de la empresa han especificado que la producción total combinada de los productos 1 y 2 debe ser de cuando menos de 350 galones.

EL CASO DE LA MINIMIZACIÓN: QUÍMICA SIGMA S.A.

- Por otro lado, se debe satisfacer también un pedido para un cliente importante por 125 galones del producto 1. Sabemos que el producto 1 requiere de 2 horas de tiempo de procesamiento por galón, en tanto que el producto 2 requiere de una hora de procesamiento por galón y existen disponibles 600 horas, de tiempo de procesamiento para el siguiente mes.
- Sigma desea satisfacer las condiciones anteriores en un costo de producción mínimo. Los costos de producción son de \$2.00 por galón del producto 1 y de \$3.00 por galón del producto 2.

SOLUCIÓN

Variables de decisión:

X1= Número de galones del producto 1 a fabricar.

X2= Número de galones del producto 2 a fabricar.

MIN Z = 2X1 + 3X2

Sujeto a:

1X1 >= 125

1X1 + 1X2 >= 350

2X1 + 1X2 <= 600

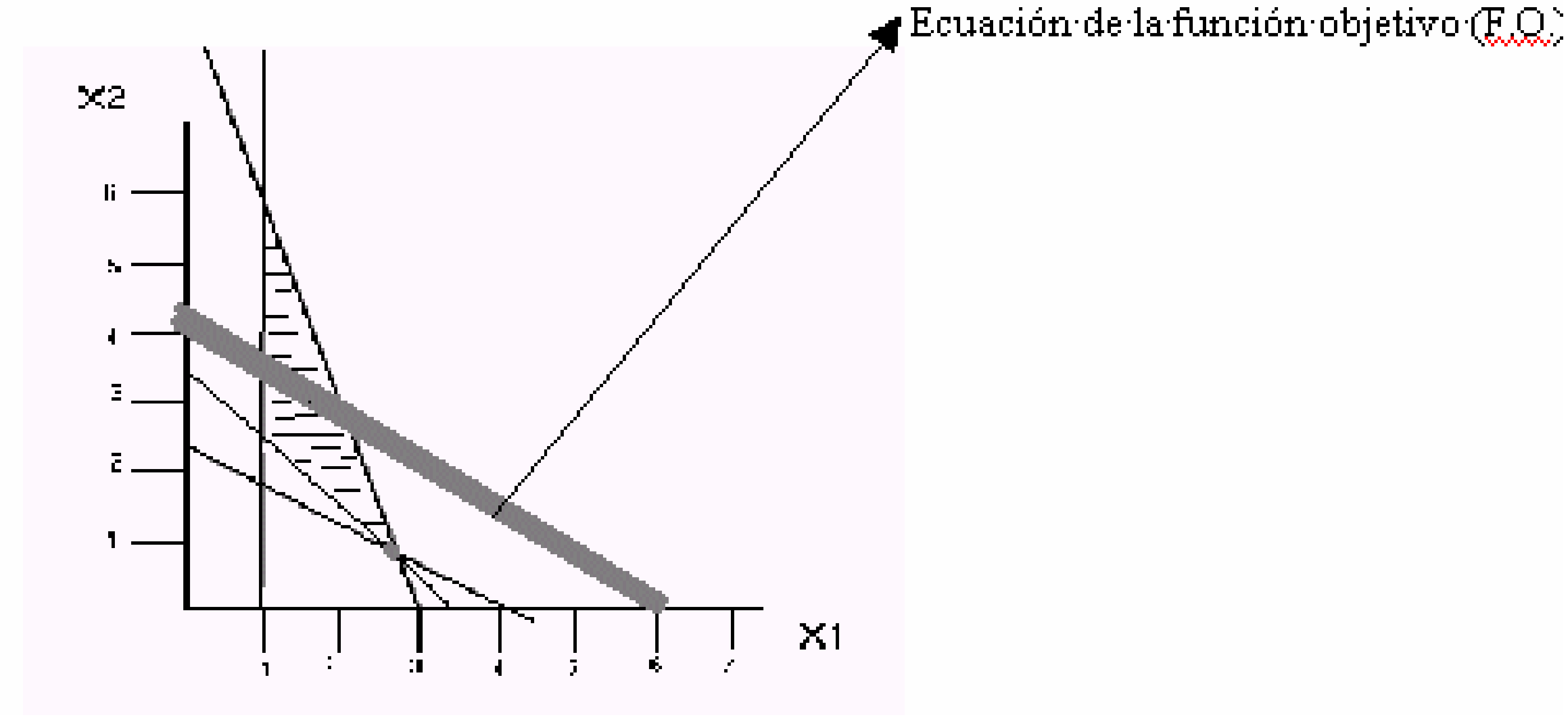
X 1, X2 >= 0

Método gráfico

Resolviendo primero por él, aprovechando que solo tiene dos variables:

1. Construir una gráfica con c/u de las rectas procedentes de las restricciones.
2. Determinar la región factible.
3. Trazar la recta de la ecuación de la función objetivo.

X1= 2.5
X2= 1.0
Z = 2(2.5) + 3 (1) = 800



- Resolviendo ahora por el método simplex y usando la técnica de variables artificiales:
- Una restricción <= genera la inclusión de una variable holgura al lado izquierdo de la desigualdad para convertirse en ecuación.
- A una restricción del tipo >= se le debe restar una variable de excedente del lado izquierdo de la desigualdad para convertirse en ecuación.

El modelo quedaría:

MIN Z = 2X1 + 3X2

Sujeto a:

1X1 >=125

1X1 + 1X2 >=350

2X1 + 1X2 <=600

X 1,2 >= 0

Que es igual a:

MIN Z = 2X1 + 3X2 + 0X3 + 0X4 + 0X5

Sujeto a:

1X1	- 1X3			= 125
1X1 + 1X2		- 1X4		= 350
2X1 + 1CX2			+ 1X5	= 600

X 1,2,3,4,5 >= 0

Multiplicar por (-1) para convertirlo en un problema de maximización:

$$MAX\ Z = -2X1 - 3X2$$

Sujeto a:

$$1X1 \geq 125$$

$$1X1 + 1X2 \geq 350$$

$$2X1 + 1X2 \leq 600$$

$$X\ 1,2 \geq 0$$

La forma tabular para este problema es la siguiente:

MAX $-2X1 - 3X2 + 0X3 + 0X4 + 0X5 - Ma1 - Ma2$

La cual incorpora variables de holgura (X3, X4, y X5) y variables artificiales (a1 y a2)

Sujeto a:

1. $1X1 \quad -1X3 \quad + 1\,a1 = 125$
2. $1X1 + 1X2 \quad -1X4 \quad + 1\,a2 = 350$
3. $2X1 + 1X2 \quad + 1X5 = 600$

$X1, X2, X3, X4, X5, a1, a2 >= 0$

PRIMERA TABLA

Cjn	Var. De Solución	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	Cant. Solución
-M	a1	1	0	-1	0	0	1	0	125(sale)
-M	a2	1	1	0	-1	0	0	1	350
0	X5	2	1	0	0	1	0	0	600
	Zj	-2M	-M	M	M	0	-M	-M	-475M
	Cj – Zj	-2+2M	-3+M	-M	-M	0	0	0	

SEGUNDA TABLA

Cj	Var. De Solución	X1	X2	X3	X4	X5	a1	a2	Cant. Solución
-2	X1	1	0	-1	0	0	1	0	125
-M	a2	0	1	1	-1	0	0	1	225
0	X5	0	1	2	0	1	-2	0	350(sale)
	Zj	-2	-M	2-M	M	0	-2+M	-M	-250-225M
	Cj – Zj	0	-3+M	-2+M	-M	0	2-2M	0	

(-1) Y (-2) (-2+2M) 225 = 225/1 175/2= 350/2

TERCERA TABLA

Tercera Tabla: ENTRA Sale de la Solución

Cjn	VAR. De SOL.	X1	X2	X3	X4	X5	a_2	Cant. solución
2	X1	1	.5	0	0	.5	0	300
M	a_2	0	.5	0	-1	-.5	1	50(sale)
0	X3	0	.5	1	0	.5	0	175
	Zj	-2	-.5M-1	0	M	.5M-1	-M	-50M-600
	Cj – Zj	0	5M-2	0	-M	-.5M+1	0	

300/.5 = 600   50/.5 = 100   175/.5 = 350

(0)   = 0+0 = 0

(.5) = (-1+.5M) + (-M) = -.5M

(1)   = (-2 + M) + (2-M) = 0

(0)   = 0 + M= M

(.5) = (-1+.5M) + 0 = .5M-1

(0)   = 0+ (-M) = -M

(175) = (-350 + 175M) + (-250-225M) = -600 – 50M

ÚLTIMA TABLA: LA ÓPTIMA

Cjn	Var. de Solución.	X1	X2	X3	X4	X5	Cant. solución
2	X1	1	0	0	1	1	250
3	X2	0	1	0	-2	-1	100
0	X3	0	0	1	1	1	125
	Zj	-2	-3	0	4	1	-800
	Cj – Zj	0	0	0	-4	-1	

Por lo tanto la solución óptima es:

$X1 = 250$

$X2 = 100$

$X3 = 125$

$Z = 800$

EJEMPLO 2

Minimizar $Z= 30X1 + 10X2$

SUJETO A:

$2X1 + 4X2 \leq 80$

$X1 + X2 = 25$

$8X1 + 6X2 \geq 120$

$X1, X2 \geq 0$

Multiplicamos por -1

Maximizar $Z= -30X1 - 10X2$

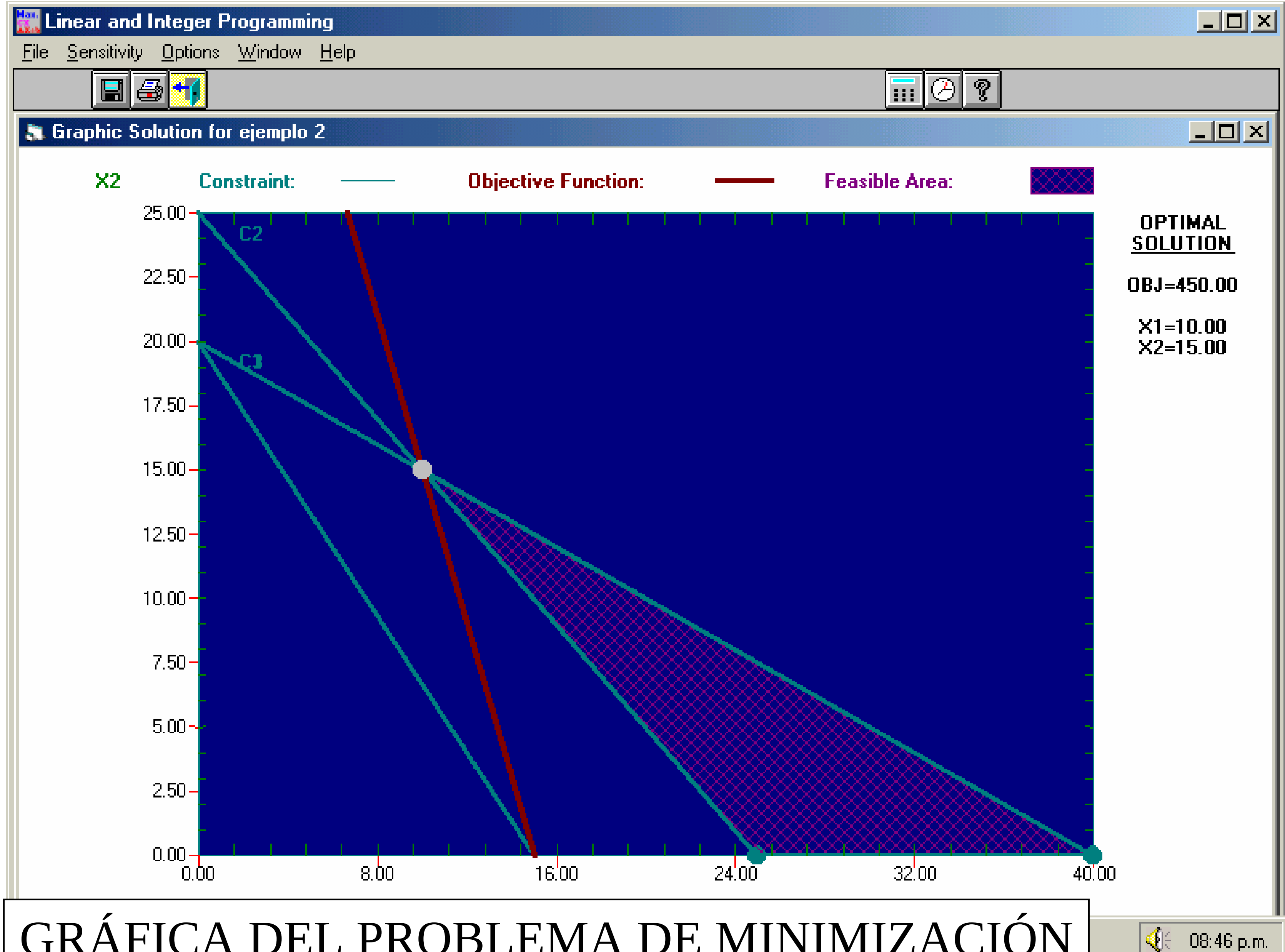
SUJETO A:

$2X1 + 4X2 \leq 80$

$X1 + X2 = 25$

$8X1 + 6X2 \geq 120$

$X1, X2 \geq 0$



GRÁFICA DEL PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN

AÑADIMOS UNA VARIABLE DE HOLGURA Y RESTAMOS UNA DE EXCEDENTE PARA IGUALAR

Maximizar $Z= -30X1 - 10X2 + OS1 + 0S2$

SUJETO A:

$2X1 +4X2 + 1S1 + 0S2 = 80$

$X1 + X2 + 0S1 + 0S2 = 25$

$8X1 + 6X2 +0S1- 1S2 =120$

$X1, X2, S1, S2 >= 0$

AGREGAMOS LAS VARIABLES ARTIFICIALES

Maximizar

Z= -30X1 - 10X2 + OS1 + 0S2-MA1-MA2

SUJETO A:

2X1 +4X2 + 1S1 + 0S2 + 0A1 + 0A2 = 80

X1 + X2 + 0S1 + 0S2 + 1A1 + 0A2 = 25

8X1 + 6X2 +0S1- 1S2 + 0A1 + 1A2 = 120

X1, X2, S1, S2, A1, A2 > = 0

TABLA 1

Cjn	VAR DE SOLUCIÓN	X1	X2	S1	S2	A1	A2	**CANT. SOLUCIÓN**
0	S1	2	4	1	0	0	0	80
-M	A1	1	1	0	0	1	0	25
-M	A2	8	6	0	-1	0	1	120
	Zj	-9M	-7M	0	M	-M	-M	-145M
	CJ-Zj	-30+9M	-10+7M	0	-M	M	M	

TABLA 2

Cjn	VAR DE SOLUCIÓN	X1	X2	S1	S2	A1	A2	**CANT. SOLUCIÓN**
0	S1	0	5/2	1	-1/4	0	-1/4	50
-M	A1	0	1/4	0	1/8	1	-1/8	10
-30	X1	1	3/4	0	-1/8	0	1/8	15
	Zj	-30	-4572-M/4	0	15/4-M/8	-M	15/4-M/8	-450-10M
	CJ-Zj	-9M	2572+ M/4	0	-15/4-17/8M	-M	15/4-M/8	

TABLA 3

Cjn	VAR DE SOLUCIÓN	X1	X2	S1	S2	A1	A2	**CANT. SOLUCIÓN**
-10	X2	0	1	2/5	-1/10	0	-1/10	20
-M	A1		0					
-30	X1		0					
	Zj							
	CJ-Zj		0					