Optimización Lineal

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Un modelo de optimización matemática

Un modelo de Optimización Matemática consiste en una función objetivo y un conjunto de restricciones en la forma de un sistema de ecuaciones o inecuaciones.

Los modelos de optimización son usados en casi todas las áreas de toma de decisiones, como en ingeniería de diseño y selección de carteras financieras de inversión .

Optimización

La humanidad hace tiempo que busca, o profesa buscar, mejores maneras de realizar las tareas cotidianas de la vida.

A lo largo de la historia de la humanidad, se puede observar la larga búsqueda de fuentes más efectivas de alimentos al comienzo y luego de materiales, energía y manejo del entorno físico.

Sin embargo, relativamente tarde en la historia de la humanidad, comenzaron a formularse ciertas clases de preguntas generales de manera cuantitativa, primero en palabras y después en notaciones simbólicas.

Un aspecto predominante de estas preguntas generales era la búsqueda de lo "mejor" o lo "óptimo".

Los gerentes buscan simplemente lograr alguna mejora en el nivel de rendimiento, es decir, un problema de "búsqueda de objetivo".

Cabe destacar que estas palabras normalmente no tienen un significado preciso.

Optimización

Se han realizado grandes esfuerzos por describir complejas situaciones humanas y sociales.

Para tener significado, esto debería escribirse en una expresión matemática que contenga una o más variables, cuyos valores deben determinarse.

La pregunta que se formula, en términos generales, es qué valores deberían tener estas variables para que la expresión matemática tenga el mayor valor numérico posible (maximización) o el menor valor numérico posible (minimización).

A este proceso general de maximización o minimización se lo denomina optimización.

PROGRAMACION MATEMÁTICA

La optimización, también denominada programación matemática, sirve para encontrar la respuesta que proporciona el mejor resultado, la que logra mayores ganancias, mayor producción o felicidad o la que logra el menor costo, desperdicio o malestar.

Con frecuencia, estos problemas implican utilizar de la manera más eficiente los recursos, tales como dinero, tiempo, maquinaria, personal, existencias, etc.

Los problemas de optimización generalmente se clasifican en lineales y no lineales, según las relaciones del problema sean lineales con respecto a las variables.

Existe una serie de paquetes de software para resolver problemas de optimización. Por ejemplo, LINDO o WinQSB resuelven modelos de programas lineales y LINGO y What'sBest! resuelven problemas lineales y no lineales.

PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

La Programación Matemática, en general, aborda el problema de determinar asignaciones óptimas de recursos limitados para cumplir un objetivo dado.

El objetivo debe representar la meta del decisor.

Los recursos pueden corresponder, por ejemplo, a personas, materiales, dinero o terrenos.

Entre todas las asignaciones de recursos admisibles, queremos encontrar las que maximizan o minimizan alguna cantidad numérica tal como ganancias o costos.

El objetivo de la optimización global es encontrar la mejor solución de modelos de decisiones difíciles, frente a las múltiples soluciones locales.

¿Qué es la optimización?

- Es una herramienta esencial de modelado.
- Optimizar significa encontrar el mínimo o el máximo de una cierta función, definida en cierto dominio.
- Optimización global es la tarea de encontrar el MEJOR conjunto de condiciones admisibles para lograr el objetivo, formulado en términos matemáticos

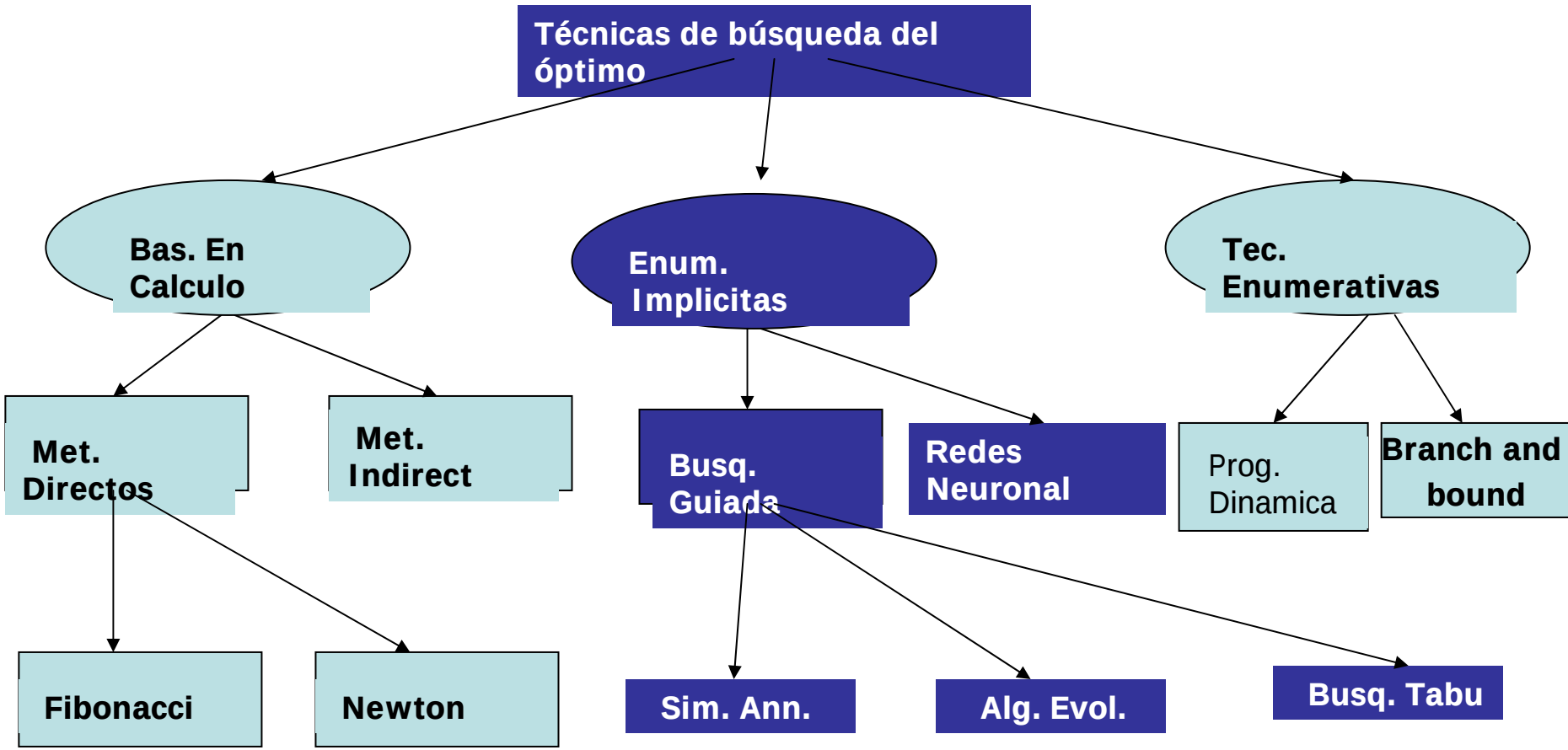
¿Cuales son los problemas?

- Los problemas de optimización global son típicamente bastante difíciles de resolver exactamente.
- Se encuentran dentro de una clase muy amplia denominada Programacion No Lineal (NLP)
- Problemas combinatorios, problemas generales sin restricciones, problemas generales con restricciones.

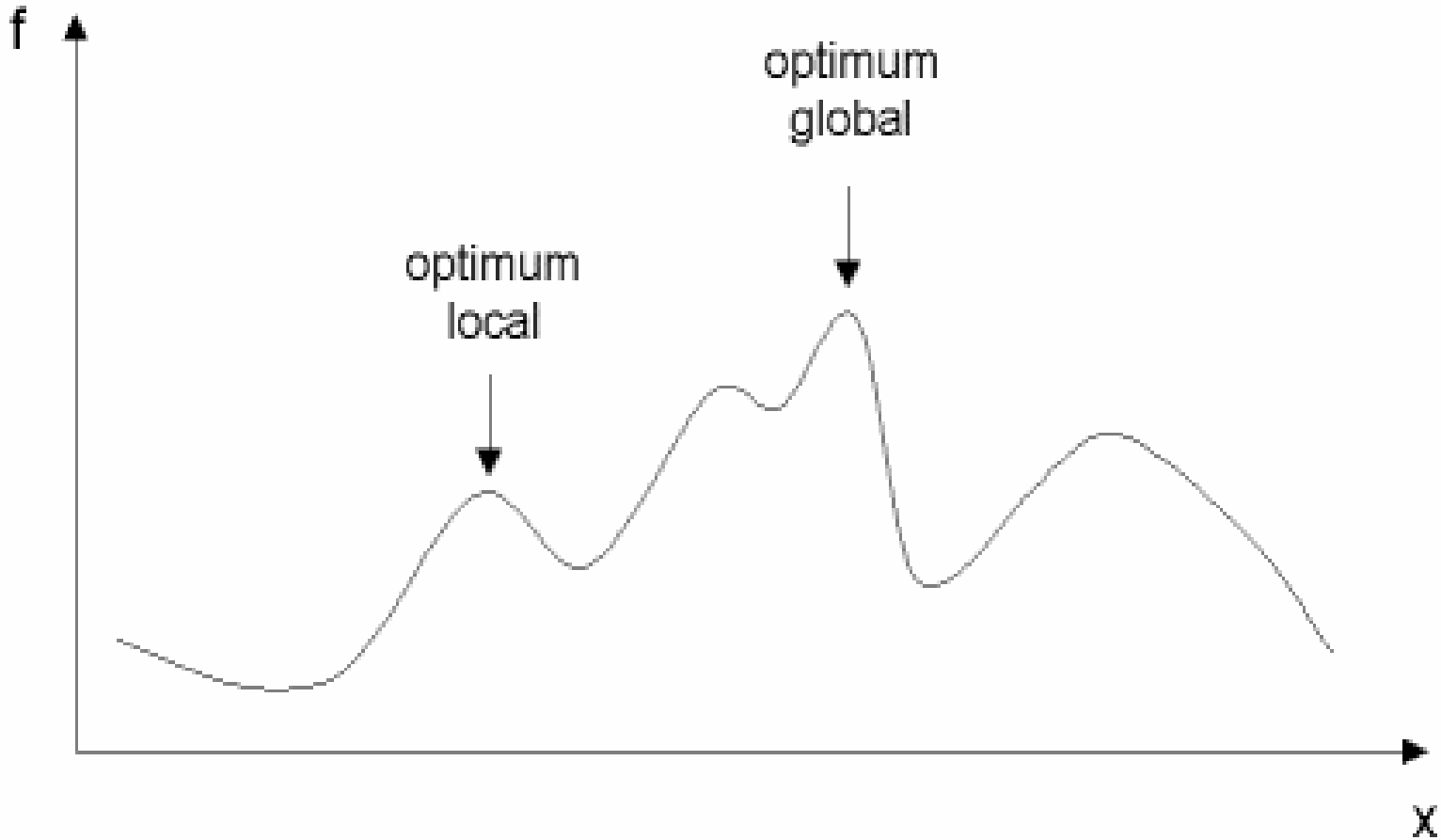
Como definir un problema de optimización

- Dado un espacio de búsqueda S junto con su parte factible $F \subseteq S$, encontrar $x \in F$ tal que $eval(x) <= eval(y)$ para todo $y \in F$
- El punto x que satisface esta condición se llama solución global

¿Cómo optimizar?



Óptimos Locales y Global



Optimizar

- Optimizar es buscar un mínimo (o máximo) a una función dada
- Existen muchas técnicas para la optimización.
- Se denomina problemas de optimización a aquellos tipos de problemas en los cuales se busca el Máximo o Mínimo de una función con un número determinado de variables, estando los valores de las mismas sujetos a ciertas limitaciones.

El problema de programación lineal constituye un caso particular de los problemas de optimización y puede describirse de la forma siguiente:

- Dada una función lineal de varias variables, se quieren determinar valores no negativos para dichas variables que maximicen o minimicen el valor de la función lineal, sujeta a ciertas condiciones que asumen la forma de un sistema de ecuaciones y/ó inecuaciones lineales.

- Considerando que r es el número de variables y que el sistema de ecuaciones y/ó inecuaciones consta de m elementos, con m < r, el enunciado anterior puede ser formulado matemáticamente como sigue:
- Se deben determinar los valores de la variable xj que hagan MAXIMO ó MINIMO el valor de la función lineal

$$Z = o_1 x_1 + o_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + o_r x_r$$

y que satisfagan las siguientes condiciones:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1r}\,x_r \quad \{\geq,=,\leq\}\, b_1$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2r}\,x_r \quad \{\geq,=,\leq\}\, b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mr}\,x_r \quad \{\geq,=,\leq\}\, b_m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots r$$

- donde cada una de las expresiones contenidas en las restricciones mantiene uno y solo uno de los signos {≥,=,≤}.
- Los valores cj, j = 1….r, bi i = 1….m y aij, i = 1….m, j = 1….r se supone conocidos y constantes, representando los datos que se utilizarán en el modelo.
- El planteamiento matemático representado por las ecuaciones anteriores es conocido como el “modelo de programación lineal” ó “modelo de optimización lineal”.
- Las variables xj se denominan <u>VARIABLES DE DECISIONES ó VARIABLES ESENCIALES</u> representando cada una de ellas, en los marcos de problema, una determinada “actividad”.

- La función Z se denomina FUNCION OBJETIVO y expresa el criterio de optimización que se utilizará en el problema.
- Los valores c1, c2… cr se denominan Coeficientes de la función objetivo.
- Puede observarse que en la expresión no aparecen términos constantes.
- Esto se debe a que los valores xj que proporcionan el mejor valor para Z, o sea el valor óptimo, son independientes de cualquier cantidad constante que se añada.
- Si en el problema concreto existiese tal constante, esta puede ignorarse durante el proceso que se utilice para hallar los valores de xj y después añadirse al valor de Z hallado.
- Al sistema de ecuaciones y/ó inecuaciones lineales se les denomina SISTEMA DE RESTRICCIONES LINEALES.
- Los b_i i = l…m constituyen el llamado Término independiente mientras que los a_{ij}, i = l…m, j = 1…r se conocen como coeficientes tecnológicos ó coeficientes de las restricciones.

- La expresión $x_j \geq 0$, la cual indica el requerimiento de que todas las variables x_j sean no negativas, se denominan <u>CONDICION DE NO NEGATIVIDAD</u>.

- Una SOLUCIÓN al problema de programación lineal estará constituida por cualquier conjunto de valores para las variables xj que satisfagan las condiciones.
- Una solución que satisfaga además la condición de no negatividad se denomina SOLUCIÓN POSIBLE o FACTIBLE.
- Nótese que esto implica que la solución posible debe satisfacer las restricciones y las condiciones de no negatividad.
- Denotaremos por M el conjunto de soluciones posibles al problema de programación lineal.

- Cualquier solución posible que proporcione el valor óptimo (Máximo o Mínimo) para la función objetivo constituye una SOLUCIÓN POSIBLE OPTIMA.
- El problema de programación lineal debe constar normalmente de un número infinito de soluciones posibles.
- Nuestro objetivo al resolver el problema consiste en determinar de entre todas las soluciones posibles, la solución óptima.

Funciones Lineales

- La programación lineal (PL) es una herramienta útil para resolver problemas de optimización.
- En 1947, George Dantzig creó un método eficaz, el ***algoritmo simplex***, para resolver problemas de manejo óptimo de recursos limitados, a los cuales se les llamó problemas de PL.
- La aplicación es tan diversa que se abarca sectores como la industria, la banca, el transporte, la educación y muchos más.

Función lineal

Una función f(X1,X2,...Xn) es una función lineal de X1,X2,...Xn si y solo si para algún conjunto de constantes C1,C2,...Cn f(X1,X2,...Xn)= C1X1 + C2X2 + CnXn.

Por ejemplo:

f(X1,X2) =2X1 + X2 es una función lineal de X1 y X2

f(X1,X2)= X12 X2 no es una función lineal de X1 y X2

Desigualdades lineales

Para cualquier función lineal f(X1,X2,...Xn) y cualquier número b, las desigualdades f(X1,X2,...Xn) $\leq$ b y f(X1,X2,...Xn) $\geq$ b son desigualdades lineales.

Así:

2X1+ 3X2 $\leq$ 3 y 2X1 + X2 $\geq$ 3 son desigualdades lineales,

Pero, X12 X2 $\geq$ 8 no es una desigualdad lineal.

Un problema de programación lineal es un problema de optimización para el cual:

1. Tratamos de maximizar o minimizar una función lineal de variables de decisión, a la cual le llamamos ***función objetivo***.

2. Los valores de las variables de decisión tienen que satisfacer un conjunto de ***restricciones*** y cada restricción tiene que ser una ecuación o una desigualdad lineal.

3. Hay una restricción de signo para cada variable. Para cualquier variable Xi la restricción especifica es que ***Xi*** tiene que ser ***no negativo*** (Xi $\geq$ 0).

Ejemplo de un problema de programación lineal

- Consideremos una fábrica que puede producir 4 productos que llamaremos I, II, III, y IV.
- El proceso productivo utilizado para la elaboración de estos productos requiere que pasen por tres tipos de maquinarias que llamaremos A, B y C.
- Supondremos que en su fabricación los productos deben pasar primero por el tipo de máquina A, después por el B y finalmente por el C, siendo despreciable el tiempo requerido en el ajuste de cada maquinaria para la elaboración de cada producto.
- Se requiere determinar cual debe ser la producción mensual para cada producto teniendo como criterio de optimización la maximización de la ganancia.

La información necesaria se muestra en la siguiente tabla, la cual indica:

La norma de tiempo (en horas) para producir una unidad de producto en cada tipo de máquina.

El total de horas mensuales disponibles por tipos de máquina.

La ganancia que se obtiene por unidad de producto.

Tipo de máquina	PRODUCTOS				Total de horas mensuales disponibles
	I	II	III	IV	
A	3	2	5	3	3500
B	1	8	2	7	9000
C	3	6	7	2	6000
Ganancia unitaria	6.00	8.50	9.80	5.10	

- Examinando la tabla podemos apreciar que el producto que proporciona la mayor ganancia es a su vez el que más horas requiere en las máquinas A y C.
- El producto II que es el que en orden siguiente proporciona mas alta ganancia requiere relativamente menos tiempo en las máquinas A y C pero utiliza el mayor tiempo en la B.
- El producto IV proporciona la ganancia más baja y requiere muy poco tiempo en las maquinas A y C pero requiere mucho tiempo en la máquina B.
- Este análisis indica que la ganancia máxima no se alcanza produciendo únicamente un solo producto, sino establecido una correcta proporción en la producción de los productos.
- Sin embargo no resulta evidente cual debe ser esta proporción.

- Supongamos que x_j representa las unidades de productos de tipo j a producir mensualmente, donde j = 1,2,3,4.
- Nos interesará pues determinar los valores que tomarán x_1, x_2, x_3 y x_4, de forma tal que se obtenga la máxima ganancia, teniendo en cuenta el total de horas máquinas mensuales disponibles.
- Veamos ahora como pueden formularse matemáticamente éstas condiciones.
- Consideremos primeramente las restricciones impuestas por la disponibilidad de las horas máquinas tipo A a utilizar con la producción de los productos será igual a:

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4$

- dado que si 3 es el tiempo requerido por unidad de producto I entonces $3x_1$ indicará el total de horas requeridas para la producción de x_1 unidades de producto I, y así para el resto de los productos.
- La cantidad total de horas a utilizar debe ser a lo sumo igual al total disponible.
- Por tanto, la limitación en horas disponibles para la máquina A se expresa a través de la restricción.

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 3500$$

- Aplicando este mismo razonamiento para las máquinas B y C, tenemos que las restricciones correspondientes son:

$x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 9000$

$3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 \geq 6000$

- Si se plantea que debe utilizarse totalmente la disponibilidad en horas para cada máquina, entonces el signo de las restricciones sería de (=).

- Dado que no es posible tener producciones negativas se plantea la siguiente condición:

$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad x_4 \geq 0$

- La ganancia total mensual puede expresarse de la siguiente forma:

$Z = 6x_1 + 8.5\, x_2 + 9.8\, x_1 + 5.1\, x_4$

- Nuestro problema consiste pues en encontrar valores para las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 que satisfagan las condiciones y que hagan Máximo a Z.
- Como puede apreciarse, la situación descrita en el ejemplo ha sido planteada mediante un modelo de programación lineal cuya solución nos daría la cantidad de productos a elaborar que hagan máxima la ganancia.
- Este constituye un ejemplo típico de la aplicación de la programación lineal a la optimización de la producción.

- Debe señalarse que cuando se procede a construir un modelo lineal que represente una determinada situación económica, el primer paso consiste en la identificación de las “actividades” en que ésta se descompone.
- Estas actividades se representan matemáticamente mediante las variables xj, y constituyen precisamente los elementos a través de las cuales se logra el objetivo que se persigue con la solución del problema.

- Estas actividades se caracterizan por el hecho de que consumen recursos, ya sean materiales, humanos, ó financieros, por la ganancia, el costo ó cualquier otra valoración económica que se escoja.
- Nuestro objetivo al buscar la solución del problema mediante un modelo de programación lineal consiste en determinar cuales son las actividades que hacen <u>máximo</u> ó <u>mínimo</u> el efecto económico fijado, teniendo en cuenta las limitaciones en cuanto a los recursos.

Supuestos del Modelo

El modelo lineal posee dos supuestos fundamentales: la proporcionalidad y la actividad.

SUPUESTO 1. PROPORCIONALIDAD

- Este supuesto significa que en el modelo lineal, los insumos requeridos para la realización de una actividad, así como el efecto económico que ésta produce, ya sea la ganancia, costo ó cualquier otra valoración económica, siempre son proporcionales al nivel de la actividad.
- Por ejemplo, supongamos que elaborar una unidad de producto j requiere una hora en la máquina A.
- Entonces el supuesto de proporcionalidad implica que producir 10 unidades requerirá 10 horas.
- Esto también es válido para la función objetivo. Si una unidad de producto j tiene una ganancia de $2.00 entonces al plantear en la función objetivo 2xj como ganancia total para el producto j implica que si xj = 10, entonces la ganancia total será de $20.

- En la práctica económica no siempre podemos afirmar que esto se cumple, ya que en general la ganancia no es proporcional al número de unidades que se venden aún cuando el precio de venta permanezca constante, ya que el costo por unidad puede variar con el número de unidades que se elaboran.
- Esto significa que la linealidad implícita en el modelo de programación lineal no es siempre una representación exacta de la realidad.
- Sin embargo, este supuesto constituye una aproximación a las condiciones que se tienen, y su consideración ha proporcionado buenos resultados que están en correspondencia con la realidad práctica.

SUPUESTO 2. ADITIVIDAD

- La linealidad no se garantiza solamente con el supuesto de proporcionalidad.
- Se requiere además que las actividades sean “aditivas” con respecto a cada recurso utilizado y al efecto económico que producen.
- Este supuesto se expresa de la siguiente manera:

El efecto económico total que es obtiene, así como el total de cada recurso utilizado como resultado de la ejecución conjunta de las actividades, debe ser igual a las sumas respectivas de las cantidades resultantes de la ejecución de cada actividad.

Ejemplo

- Supongamos que producir una unidad de producto A en la máquina 1 requiere 2 horas y producir una unidad de producto B en dicha máquina requiere 3 horas.
- Denotamos por x1 el total de unidades de producto B.
- Cuando expresamos matemáticamente $2x_1 + 3x_2$ estamos significando que el total de horas máquinas a utilizar es la suma de las horas que se utilizan para el producto A y para el producto B.
- Este mismo análisis puede efectuarse para la función objetivo.
- Supongamos que ésta expresa ganancia, por tanto al escribir en forma general $MAX\ Z = \sum o_j\ x_j$, estamos implícitamente expresando que la ganancia total se obtiene sumando las ganancias que proporcionan los distintos productos.

- Este supuesto implica también que solo podemos sumar elementos que tengan la misma unidad de medida.
- El ejemplo visto anteriormente respecto a la utilización de las horas máquinas parece razonable, sin embargo no todos los procesos físicos se manifiestan de la misma manera.
- Por ejemplo si mezclamos líquidos con diferentes composiciones químicas no siempre es cierto que el volumen total de la mezcla sea la suma de los componentes individuales.
- Este es un caso en que no se cumple la aditividad.

- Otro ejemplo es el caso en que un producto sea elaborado con los desechos de otro.
- El subproducto se obtendrá solo si se produce el producto original, sin embargo, el requerimiento total, digamos de materiales, si se producen ambos será menor que la suma de los requerimientos si se producen individualmente.
- Otros aspectos que caracterizan el modelo de programación lineal son la existencia de la función objetivo, la cual nos expresa el objetivo que se persigue con la solución de problema, y la condición de no negatividad requerida para cada variable.

- Una limitación importante inherente al modelo de programación lineal está dada por el hecho de que la solución óptima del mismo puede admitir valores enteros y/ó fraccionarios.
- Sin embargo, puede darse el caso de que las variables solo tengan significado si toman valores enteros.
- Un procedimiento a utilizar en esta situación, sería resolver el problema mediante un modelo de programación lineal y caso que la solución contenga valores fraccionarios, aproximar éstas a los valores enteros que satisfagan las restricciones.
- Esta vía no siempre garantiza el óptimo.
- Para lograr la solución óptima en este caso se aplicaría algún algoritmo que resolviese el problema de la programación lineal discreta ó en enteros.

- El modelo de programación lineal es un modelo determinista. Esto significa que los coeficientes a_{ij}, c_j y el término independiente b_i son conocidos y constantes.
- El modelo lineal no admite valores probabilísticas.
- El modelo de programación lineal siempre será aplicable a toda situación en la cual:
  - Existe un objetivo bien definido a alcanzar con la solución del problema.
  - Hay una gran cantidad de factores que limitan la solución de dicha solución.
  - Estos factores deben ser manejados simultáneamente, existiendo una interacción entre los mismos.

Construcción del Modelo de Programación Lineal

El procedimiento para la construcción del modelo puede resumirse en la forma siguiente:

- PASO 1. Definición de las variables de decisión.
- PASO 2. Construcción del sistema de restricciones.
- PASO 3. Construcción de la función objetivo.

PASO 1. Definición de las variables de decisión.

- La definición de la variable de decisión es el primer paso en la construcción del modelo de programación lineal.
- Cada variable de decisión se identifica con cada una de las actividades en que se descompone el problema que se estudia.
- El nombre de variable de decisión que se da a las actividades responde al hecho de que son variables sobre las cuales se puede tomar una decisión directamente para resolver el problema que nos ocupa, en otras palabras, son los elementos a través de los cuales se logra el objetivo que se persigue son la solución del problema.
- Por ejemplo, si el objetivo consiste en minimizar el costo total de producción, el mismo se puede lograr a través del establecimiento de un surtido de productos, el cual conformaría en esta caso el conjunto de las variables de decisión.

La definición de la variable de decisión tiene varias etapas básicas:

- la conceptual y
- la dimensional; y
- una temporal, la cual en algunas ocasiones es necesario analizar.

Definición conceptual

- Es aquella que se refiere a la determinación de las variables, es decir qué significa esa variable en el contexto del problema.
- Cuando se procede a definir conceptualmente una variable, debe tenerse presente el principio de unicidad.
- La unicidad puede ser de cuatro tiempos: de origen, destino, estructura tecnológica y coeficiente económico.

- Un mismo producto puede ser definido mediante muchas variables en dependencia del criterio de unicidad.
- Por ejemplo, el producto azúcar.
- Si se trata de resolver un problema sobre el comercio exterior de Cuba, el azúcar podrá ser una variable dentro de un balance comercial de productos cubanos, sin que interesase en este caso, digamos, que unidad azucarera la produjo; o sea en ese caso podríamos definir:
- x1 – azúcar exportable.

- Sin embargo, si en un problema de comercio exterior, se considera el azúcar como posible de exportar a países socialistas y capitalistas, habría necesidad de definir dos variables, de la forma siguiente:

x1 – azúcar exportable a países socialistas.

x2 – azúcar exportable a países capitalistas.

- Si se hubiese definido una sola variable, se habría violado el principio de <u>unicidad de destino</u>; y, dado un valor numérico de esta variable no se podría distinguir cuánto correspondería al área socialista, y cuánto al área capitalista; y en esta segunda situación se planteaba la necesidad de saber cuánto se exportaba a cada área.

- En el caso de que resultara interesante determinar si el azúcar fuera exportado por el puerto de Mariel o el puerto de Nuevitas, y se mantuvieran los mismos destinos, habría necesidad de definir cuatro variables:

x1 – azúcar exportable por Mariel a países socialistas.

x2 – azúcar exportable por Mariel a países capitalistas.

x3 – azúcar exportable por Nuevitas a países socialistas.

x4 – azúcar exportable por Nuevitas a países capitalistas.

- Si se hubieran definido solamente dos variables, se habría violado el principio de <u>unicidad de origen</u>, y dados los valores de las dos variables no se podría identificar cuánto se exportaría por cada uno de los puertos.

- Si el modelo de exportación de azúcar contemplara la exportación de azúcar crudo y refino, con los mismos orígenes y destinos, sería necesario definir ocho variables, o sea:

x1 – azúcar crudo exportable por Mariel hacia países socialistas.

x2 – azúcar refino exportable por Mariel hacia países capitalistas.

etc, con las demás variables.

- Supongamos finalmente que en nuestro modelo se debe considerar solo la producción de azúcar crudo pero teniendo en cuenta la tecnología con que se procesa la caña. Consideremos que puede producirse el azúcar crudo mediante el procesamiento de la caña con tandem ó con difusor.

- En este caso sería necesario definir para el azúcar crudo dos variables; una que represente el azúcar crudo a producir con tandem y la otra que represente el azúcar crudo a producir con difusor.
- Si las variables no se definiesen de esa forma se habría violado e principio de unicidad de estructura tecnológica.
- La unicidad de coeficiente económico es un resultado de las anteriores; ya que es muy probable que un producto, al variar su destino y/o su origen, y/o su estructura tecnológica, modifique su coeficiente económico, es decir, su costo, ganancia, etc.

- Debe señalarse que podemos tener problemas en las cuales todas las variables tengan el mismo coeficiente económico.
- Este en el caso en que por ejemplo se desee maximizar la producción, por lo que todas las variables tendrán un coeficiente igual a la unidad.
- Como se aprecia, el concepto de unicidad en la variable de decisión está íntimamente relacionado con el objetivo que se persiga al plantearse el problema, y con el grado de detalle con que se desee trabajar.
- En resumen, toda variable debe tener origen único, destino único, estructura tecnológica única y un coeficiente económico único, <u>en función de marco del problema a resolver</u>.

Definición dimensional

- Una vez precisada la definición conceptual de una variable, es necesario pasar al aspecto cuantitativo de esta definición, es decir a las unidades de medida que van a ser utilizadas para operar con esta variable.
- No basta con definir a una variable por su cualidad, sino que es también necesario (según se verá posteriormente, cuando se estudie la construcción de una restricción) definir esa variable en términos cuantitativos, es decir, en unidades, toneladas, decenas, caballerías dedicadas a un producto, etc.

- Como ejemplo de una variable definida conceptual y dimensionalmente se puede citar:

x1 – Kgs. de producto A elaborado en la fábrica con destino a la localidad Z.

- No siempre es fácil determinar la dimensión de la variable de decisión.
- Pueden presentarse dificultades respecto a la dimensión física por forma en que se presentan los datos.
- En este sentido se deberá meditar sobre la forma más idónea de definir dimensionalmente a la variable, y ser consecuente con esa definición en todo el modelo.
- En otras palabras, si se define la variable como toneladas de producto, donde quiera que ella se encuentre dentro del modelo tendrá esa misma significación; y, si por ejemplo, se incluyese en una restricción que esté expresada en Kgs. del mismo producto, es necesario multiplicar la variable por el escalar 1000.

Definición temporal

- Existen problemas en los que hay que tomar en cuenta la definición de la variable en el tiempo, ya que es posible tener algunos datos semestrales, otros anuales, mensuales, etc.

PASO 2. Construcción del sistema de restricciones

- El sistema de ecuaciones y/o inecuaciones junto con la condición de no negatividad constituyen las limitaciones que forman el conjunto posible de decisiones a tomar; ya que, en programación lineal no se optimiza la función objetivo en general, sino sujeta a restricciones que hay que respetar.
- Dado que el modelo es lineal, todas y cada una de las restricciones tienen que cumplir los requisitos de la linealidad.
- Cuando se va a construir una restricción, se recomienda seguir el procedimiento que e expone a continuación:

Primero

- Cerciorarse del carácter limitado de la supuesta restricción, y definir (caso de que ella efectivamente se puede clasificar como tal) la dimensión física y temporal de la constante que se colocará en el término independiente (bi), así como el signo de la restricción de la forma siguiente: una disponibilidad máxima, con el de menor o igual que (>=); una cota mínima a cumplir, con el signo de mayor o igual que (<=), o un requisito exacto, que se representa mediante una ecuación (=).

Segundo

- Analizar qué variable (s) forman parte de la restricción.

Tercero

- Una vez ubicadas en la restricción la (s) variable (s) correspondiente (s), y con vista a cumplir el supuesto de aditividad de todo modelo lineal, es necesario discutir cómo se definirá el coeficiente de conversión-conocido por "a_{ij}- que permitirá adaptar la dimensión de las variables de decisión a la de la restricción", y posibilitará sumar resultados homogéneos.

Ejemplo

- Se define a x_1 como unidades de producto A,
- x_2 como unidades de producto B, y
- b_1 como Kgs. de materia prima K disponible
- y la restricción es $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

Dimensionalmente

$$\left[\frac{\quad}{\quad}\right] \text{(unidades de producto A)} + \left[\frac{\quad}{\quad}\right] \text{(unidades de producto B)} \leq \text{Kgs. de materia prima}$$

Es necesario definr los “a_{ij}” de forma que su producto por las variables resulte igual a Kgs. de materia prima k, o sea

$$\left[\frac{\text{Kgs. de materia prima k}}{\text{Unidad de producto A, B}}\right]$$. Por lo tanto,

$$\left[\frac{\text{Kgs de materia prima k}}{\text{Unidad de prod. A}}\right]\left[\text{Unidad de prod. A}\right] + \left[\frac{\text{Kgs de materia prima k}}{\text{Unidad de prod. B}}\right]\left[\text{Unidad de prod. B}\right] \leq \left[\text{Kgs. de mat. prima k}\right]$$

- Nótese que se cumple la homogeneidad, ya que se eliminan las unidades de producto A y B, contenidas simultáneamente en el numerador y denominador de cada término, y se suman magnitudes de materia prima k con magnitudes de materia prima k cuya suma está expresada también en magnitudes de materia prima k.
- De esta forma se deberá definir la dimensión del coeficiente de conversión a_{ij}.

- La información puede estar disponible en forma directa, o sea tal como se necesita, en cuyo caso se plantea al producto del coeficiente por la variable, pero es posible que la información este dada en forma inversa, por ejemplo en el caso anterior si se diera el “aij” como unidades de producto A por Kg. De materia prima k.
- En este caso se multiplica la variable por el reciproco del coeficiente, es conveniente aclarar que el “aij” puede ir en el numerador o el denominador, pero que la variable <u>siempre</u> estará en el numerador. Colocar la variable en el numerador haría perder el carácter lineal al modelo, y en lugar de una relación lineal se representaría una hiperbólica.

- Se desea recalcar que, cuando se obtiene el dato, la expresión que será colocada en el denominador, es la unidad que se toma como referencia, por ejemplo, toneladas de materia prima por unidad de producto, pares de zapato elaborados por hora de trabajo.
- En estos ejemplos, la unidad de producto y la hora de trabajo irían en el denominador.
- En la practica el coeficiente “aij” es generalmente una media del insumo por unidad de producto. Se debe estudiar si esta media tiene una desviación estándar relativamente pequeña.
- De no ser así, las variaciones del coeficiente “aij” podrían afectar seriamente la solución del problema que se supone determinista en todos sus componentes.
- Si por ejemplo, una unidad de producto supone utilice “t” minutos de trabajo en una maquina, y en rigor utiliza a veces 2t o t/2, la producción del producto utilizaría mas o menos tiempo del planteado y afectaría el fondo de tiempo total para los demás productos.

Respecto a las restricciones de un problema de programación lineal, es conveniente señalar algunas cuestiones:

1.- Se entiende por restricción una limitación afectiva a la solución del problema.

Si un recurso dado no esta escaso no debe plantearse como restricción.

En caso de duda es preferible resolver el problema sin la restricción “posible” y después comprobar si la misma es respetada por la solución hallada.

Si se diera el caso de que todas las restricciones tuviesen este carácter, el problema ya no seria de programación lineal; en rigor, no existiría el conjunto convexo de soluciones posibles.

2.- A continuación se relacionan las restricciones mas frecuentemente encontradas en la practica de la economía:

- Capacidad máxima de producción de una entidad económica o de algún departamento restrictivo.
- Capacidad mínima a utilizar, o requisitos mínimos a cumplir por un conjunto de variables.
- Disponibilidad máxima de recursos humanos y materiales.
- Balance tecnológico entre productos que se expresan mediante igualdades o desigualdades.
- Dependencias funcionales entre variables del tipo xi <,j>,o = a xj, donde “a” es un escalar.
- Cotas máxima o mínimas para las variables.
- Requisitos mínimos de contenido de un ingrediente dentro de una mezcla, bajo la forma xi b xk, donde “b” es una determinada proporción, etc.

3.- Cuando se plantea cualquier magnitud en un “bi” se debe precisar el periodo para el cual es valida esa magnitud, y si la misma esta sujeta a variaciones con vista al posterior análisis de sensibilidad.

4.- Cuando se suministren datos de demandas, debe tenerse en cuanta, si son datos suministrados por algún organismo, el método mediante el cual fueron calculadas; y no aceptarla sin profundizar sobre el grado de confiabilidad que las mismas puedan tener.

5.- No deben olvidarse que la condición de no negatividad es una condición del modelo, por tanto <u>siempre</u> es necesario escribirla explícitamente.

PASO 3. La construcción de la función objetivo

- La función objetivo es una función lineal que incluye a todas las variables del problema (aunque haya algunas que posean coeficiente nulo) y expresa el propósito central que se persigue con la solución del problema.
- Debemos detenernos en este punto.
- Un problema de programación lineal difícilmente tenga un solo objetivo: hay objetivos primarios, secundarios, etc.
- Los objetivos primarios se plantean directamente en la función objetivo; y los secundarios, mediante restricciones.
- A tono de ejemplo, citaremos que el objetivo central de una rama puede ser, en un momento determinado, minimizar el costo de producción de todas sus empresas.
- Sin embargo, también esta interesado en satisfacer la demanda de determinados productos, utilizar sus capacidades en determinados niveles, mantener un balance entre empresas, etc.
- Todos estos fines se consideran como secundarios, y se plantean a través de las restricciones correspondientes.

- La función objetivo cumple varios propósitos interrelacionados.
- En primer lugar es el instrumento matemático que permite hallar la solución del programa de programación lineal en el contexto de las restricciones planteadas;
- en segundo lugar, es la vía cuantitativa concreta para demostrar que una solución dada (planteada apriorísticamente o por cualquier medio no fundamentado científicamente) es menos eficiente que la propuesta por el modelo;
- y en tercer lugar, es un poderoso instrumento persuasivo para la aplicación de una solución, sobre todo cuando se trata de modificar métodos de trabajo.

La minimización de los gastos (costos de producción, costos de distribución, costos de producción y distribución, componentes importados, desperdicios, insumos de algún recurso en particular, etc.) tiene lugar siempre y cuando se cumpla al menos una de las condiciones siguientes:

1.- la demanda para el producto prácticamente no depende de los precios de realización y deberá ser satisfecha obligatoriamente.

2.- los precios para el producto no pueden ser establecidos en el momento de la solución del problema.

3.- los pronósticos de las limitaciones de los recursos deficitarios son menos confiables que los propósitos de demanda.

4.- existen datos confiables respecto al gasto que se desea minimizar.

5.- el problema se refiere a empresas no lucrativas.

La maximización de la ganancia (o ingresos) tiene sentido en los casos siguientes:

1. - la demanda del producto depende sustancialmente del precio de realización del mismo.
2. - la necesidad del producto no puede ser totalmente satisfecha por las empresas del sector en cuestión.
3. - la estructura del surtido de la producción no puede haber estado dada anteriormente, y debe ser definida en el proceso de solución del problema.
4. - los precios de los productos tienen un grado considerable de estabilidad, y se pueden determinar en forma confiable.

La maximización de la producción se aplica cuando:

1. - no sea posible establecer los costos en forma fidedigna.
2. - se puede establecer un precio promedio relativamente constante para todos los productos, y entonces la maximización de la producción implica realmente una maximización del ingreso.
3. - los costos de transporte no sean significativos y se plantee una demanda nacional.
4. - las materias primas o algún otro recurso muy escaso sé deberán tratar de utilizar en su totalidad.

- En la construcción de la función objetivo debe tenerse presente la propiedad aditiva implícita en toda expresión lineal, así como el análisis dimensional, en forma análoga a la expuesta en la construcción de las restricciones.
- En la práctica a veces puede resultar necesario plantear mas de una función objetivo para hacer más amplio un trabajo, o incluso por que no sé este claro en cual debe ser la función objetivo en un problema dado.

- Una función del investigador que aplique un modelo de programación lineal es también ayudar a descifrar el problema de la definición de la función objetivo en el aspecto cualitativo, y participar de la forma más activa posible de la adopción de la mas adecuada a los propósitos del trabajo.

Problemas típicos de la programación lineal

1.- Distribución de productos desde un conjunto de orígenes a un conjunto de destinos de forma que se satisfagan la demanda en cada destino, y los suministros disponibles en los orígenes, y se minimice el costo total de transporte.

2.- Distribución de productos de fabrica a almacenes, similar a (1) pero minimizando costos de producción y distribución, o maximizando una función de ingresos menos los costos de producción-distribución.

3.- Estudios de localización de plantas, donde se producen varios productos como en un combinado de plantas descentralizadas. Aquí se desean evaluar varias localizaciones alternativas para la construcción de una nueva planta. Cada localización considerada produce una matriz de asignación independiente de las fabricas a los puntos de distribución, debido a la existencia de diferentes costos de producción y distribución.

4.- Distribución de producción entre plantas. Aquí el problema es parecido al (3), pero ahora la pregunta es que plantas operan y a que niveles para una demanda total determinada. Dado que es posible obtener capacidad adicional en cada planta a trabes de tiempo extra; y dado que la operación de algunas fabricas anticuadas puede resultar anti-económica, es posible que los costos totales puedan ser minimizados: cerrando algunas plantas.

5.- Redistribución de carros vacíos desde sus posiciones de entrega de productos a los puntos donde ellos son necesitados de tal forma de minimizar los costos de transporte.

6.- Asignación de materias primas limitadas utilizadas en una variedad de productos para que la ganancia total sea maximizada, sujeta a satisfacer una demanda mínima.

7.- Asignación de facilidades de producción cuando se dispone de diferentes alternativas de ordenes en la secuencia productiva. Dado el tiempo unitario de maquina para las rutas alternativas de maquinas, las horas totales disponibles en cada maquina, los requisitos tecnológicos para cada producto, la programación lineal puede dar una solución que maximice alguna función de ganancia, minimice el costo, etc.

8.- Problemas de mezcla. Un fabricante de pintura puede necesitar preparar pinturas para vehículos que constituyen una mezcla de varios constituyentes. Los constituyentes están disponibles en cantidades limitadas y en mezclas comerciales de proporciones fijas. Se conocen los costos por galón de las diferentes materias primas. El problema es determinar la cantidad de cada materia prima tal que las cantidades requeridas para las nuevas mezclas sean obtenidas con un costo mínimo.

9.- Maximizar la utilización de un material. A veces se requiere obtener medidas de una materia prima, y el suministrador debe hacer cortes sobre planchas de un tamaño determinado. El problema es determinar la combinación de cortes que haría frente a la demanda con un mínimo de desperdicio.

10.- Problemas de asignación de recursos entre varios productos. Este problema es bastante frecuente. Si se tienen facilidades de producción que pueden ser utilizadas para producir varios tipos de artículos con costos diferentes, ganancias y demandas distintas, deseamos conocer como asignar mejor la capacidad disponible a los diferentes productos dentro de las limitaciones de la demanda.